



TITLE:

道路網における等時間原則による
交通量配分に関する基礎的研究(
Dissertation_全文)

AUTHOR(S):

井上, 博司

CITATION:

井上, 博司. 道路網における等時間原則による交通量配分に関する基礎的研究. 京都大学, 1976, 工学博士

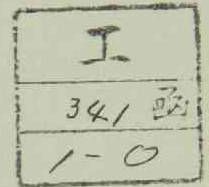
ISSUE DATE:

1976-03-23

URL:

<https://doi.org/10.14989/doctor.r3019>

RIGHT:



道路網における等時間原則による 交通量配分に関する基礎的研究

昭和 50 年 10 月

井 上 博 司

道路網における等時間原則による 交通量配分に関する基礎的研究

昭和 50 年 10 月

井 上 博 司

序

今日、自動車による環境汚染への批判の高まる中、道路計画者と利用者の自動車に対する価値観の変化が迫られており、道路と自動車のより有効な利用が計られなければならない。

交通量配分理論はこれまで交通の施設計画、管理運用計画の面で欠くことのできない基礎理論として重要な役割を果たしてきた。今後の道路計画におけるより緻密な調査、分析と交通の管理運用における合理化のために交通量配分理論はより一層重要となってくる。

これまで数多くの交通量配分モデルが提案されてきたが、十分理論的かつ実地的な方法はほとんど存在しない。そのうちではJ. G. Wardropによる等時間原則交通量配分が、最も説得力のある合理的なモデルだと考えられている。また分割配分法やウェイン法などの実際に使用されているモデルの多くが、いずれも等時間原則による配分の近似計算法であると考えられる点から、等時間原則配分は最も基本的な配分モデルであるとも言えよう。

これまで等時間原則配分の実用化が遅れていたのは実際の計算がほとんど不可能であったためである。このため本研究では等時間原則配分の実用化を目標として計算法の開発を行った。また等時間原則配分に関連するいくつかの問題をとり扱った。本研究を実際の計画に適用するためには、まだ克服すべき多くの問題を含んでいるが、交通量配分理論の発展の上で資するところがあれば望外の幸である。

本研究を行うにあたり、終始御鞭撻と御指導をいただいた京都大学米谷栄二名誉教授および佐佐木綱教授に対し、深甚なる謝意を表したい。また討議および計算に御助力をいただいた建設省長沢小太郎氏、兵庫県庁永井隆夫氏をはじめ、京都大学工学部交通土木工学教室交通施設計画、運輸交通計画両研究室の諸兄に対し心より感謝の意を表する次第である。

昭和50年10月

井 上 博 司

目 次

第 1 章 序 論	1
1.1 本研究の意義と目的	1
1.2 交通量配分に関する従来の研究の概要	3
1.3 本研究の概要	7
第 2 章 等時間原則交通量配分における基本的事項	8
2.1 道路網の代数的表示	8
2.2 交通量配分における変量の取り扱い	9
2.3 凸極性に関する性質と定義	12
2.4 走行時間関数	15
2.5 等時間原則による交通量配分の計算法に関する従来の研究の概要と その問題点	16
2.6 等時間原則による交通量配分の定式化	20
2.7 等時間原則による交通量配分における解の一意性	22
2.8 Jørgensen による目標関数最小化と交通流の均衡分布	25
第 3 章 線形走行時間関数の場合の等時間原則による交通量配分計算法	28
3.1 計算法の概要	28
3.2 計算のアルゴリズム	31
3.3 経路の一次独立性に関する定義と性質	39
3.4 若干の理論的補遺	42
3.5 配分計算の手順と計算例	49

第 4 章	非線形走行時間関数の場合の等時間原則による交通量配分計算法	58
4.1	走行時間関数の逐次線形近似による解法	58
4.2	Wolfeの解法の適用	60
4.3	SUMT変換適用における問題点	62
4.4	計 算 例	67
第 5 章	交通量配分と道路網計画に関連する諸問題	77
5.1	総走行時間最小化原則と等時間原則との関連性	77
5.2	等時間原則による交通量配分におけるパスフローの推定	85
5.3	カット法における問題点	92
5.4	等時間原則による交通量配分における解の存在条件	96
5.5	道路網における最大フロー	97
第 6 章	分割配分法に関する 2, 3 の改良	104
6.1	分割配分法と等時間原則配分との関連	104
6.2	OD交通量の分割についての検討	107
6.3	ネットワークの分割による経路探索の効率化	110
第 7 章	結 論	125
参 考 文 献		130

第1章 序 論

1.1 本研究の意義と目的

交通量配分理論は、自動車の運転者が、トリップの起点と終点の間に存在する幾つもの可能な経路のうちから最も適した経路を選択するメカニズムを解析し、計画されている道路網の各部分に生じる自動車交通量を求めるものである。

交通量配分理論が道路網計画で重要になってきたのは1950年代からである。それまでは自動車交通量自体が道路容量に比べて随分少なかったので、自動車は概ね起終点間の距離が最短となる経路を通るとして計画が立てられていたようである。また道路網がまだ未発達で起終点間にそう何本もの経路が存在するという状態でもなかったのである。その後産業の急速な発達にとともに、物資輸送のための産業道路が続々と建設されるようになってきた。それにもまして所得水準の上昇によるモータリゼーションの進展が道路網の整備を必要とし、それがさらにモータリゼーションを進展させるという循環によって、自動車交通は驚異的な発達をとげてきた。それにつれて道路網を計画するための理論も必然的に進歩してきている。

道路を新設あるいは改良しようとする場合、まずその路線に将来どれ位の交通量が流れるかを試算する必要がある。この推定交通量によって道路の幅員、線形、その他の構造のかんりの部分が決められる。また推定交通量から、その路線の利用者に及ぼす直接的な便益や、地域経済に及ぼす波及効果、開発効果などが試算され、その路線の経済効果が求められる。地域に及ぼす環境の評価も推定交通量をもとに行われる。こうして得られた経済効果や建設費、さらには環境の評価をもとにして、路線の新設、改良の必要性の有無や代替案との比較、あるいは他の路線との間の着工の優先順位などが検討されるのである。

道路を1本の路線としてではなく、より広い視野に立って路線の集りからなる道路網としてとらえ、その改良を行うことも重要である。この場合、計画されている道路網が将来の需要交通量を十分に負担しえるものであるかどうかを検討されなければならないし、またその道路網の形状が、経済効率の面や生活環境への影響などいろいろな面から検討して最適なものではない。もちろん交通量配分がそれらの検討に必要な不可欠なものであることはいうまでもない。

最近では住民運動が活発になり、自動車の排気ガスや騒音、振動等の交通公害の面から新に路線を建設することが次第に困難になりつつある。それゆえ既存の道路網をいかに有効に使用する

かが重要な課題になってきている。また排ガス、騒音等の生活に及ぼす悪影響を排除するために、交通を規制することがよりいっそう必要になってくる。こういう意味から交通管制の重要性が今後ますます認識されてくるものと思われる。もちろん交通管制は道路網での自動車の流れ方がわかってはじめて可能となるものである。

最近の大型プロジェクトで自動車の経路制御を行うという研究もなされている。これは都市内における時々刻々の車の流れ方をとらえて各自動車の目的地までの最適な経路を算出し、適当な通信手段によってこれを指示するものである。この研究では交通流の状態予測のために、オンラインで交通量配分の手法が用いられているようである。

このように交通量配分は交通の施設計画から運用計画、管理計画といった分野にまで広く用いられているが、交通需要推計の一連のプロセスにおける1ステップとしての配分が最も重要である。一般に交通需要推計は、各種の手法の派生的相違を別とすると、基本的には3段階よりなる。すなわち発生及吸引交通量の推計、分布交通量の推計、配分交通量の推計の3段階であり、パーソントリップ手法ではこの間にさらに交通機関分担のステップが入る。交通量配分は交通需要推計の最終ステップであり、推定された地域間交通量を妥当な経路に割り当て、道路網の各部分に生じる交通量を求めるものである。

自動車トリップを道路網の中の各経路に割り当てる基準は現実的であり、もっともらしいものでなければならない。現在までのところ、“運転者は起終点間の所要時間が最短となる経路を選択する¹⁾”という基準が最も妥当なものと考えられている。これは1953年にJ. (i. Wardrop¹⁾によって提案されたものであり、Wardropの第1法則あるいは等時間原則と呼ばれている。道路のある区間を走行するのに要する所要時間は、その区間を流れる交通量によって変化することが前提となっているので、起終点間の最短経路はただ1本とは限らない。最短経路が2本以上存在するならそれらの所要時間は等しいわけである。

等時間原則では起終点間の所要時間だけが考慮される。もちろん所要時間だけが経路選択を説明する要因ではない。しかしこれが経路選択における最も重要な要因であることはこれまでの実証的研究でたびたび指摘されてきて^{2),3)}おり、しかも最も所要時間の短い経路を利用しようとする傾向が強いようである。ただ運転者が起終点間を走行するのに要する所要時間を正確に把握しているのかは疑問である。走行時間はその日の天候状態や曜日、とりわけその日の交通状態によって変わる。したがって運転者はどの経路の所要時間がいくらで、またどの経路が最短であるかを正確に知っているわけではない。しかしそれまでの運転の経験から所要時間の最も短いと思われる経路を選択すると考えるのは合理的である。また仮にそれが真の所要時間最短の経路でなくても、

別の経路を走った時の経験や他人からの聞き伝え等によりさらに所要時間の短い経路が存在する
なら、次からはその経路を選択するようになる。こうして運転者が常により所要時間の短い経
路を求めていった場合、最終的には“選択される経路については所要時間が皆等しく、それ以外
の選択されないどの経路の所要時間よりも小さい。”という平衡状態に近づくと考えられる。この
ような性質を満足する交通流分布を求めることが等時間原則による交通量配分である。

交通量配分が他の交通需要推計のステップと著るしく異なる点は、ネットワークフローを扱うと
いう点にある。しかもそれはマルチコモディティフローであり、またフローディペンデントであ
るという点において、ネットワークフローでも最も難しい部類の問題に入る。これまで交通量配
分に関して多くの研究がなされており、等時間原則による配分に限ってもいくつもの解法が発表
されているにもかかわらず、合理的であり、かつ十分実用的な方法は未だ存在しない。本研究は
以上のような社会的要請から、交通の施設計画、管理計画、運用計画に資するために、等時間原
則による交通量配分の実用的計算法を開発しようとするものである。

1.2 交通量配分に関する従来の研究の概要

交通量配分が道路網計画で重要になってきた1950年代の初期には、交通量配分の目的は既
存の道路網の上に提案された高速道路への転換交通量を求めることであった。このために旧道路
と新設道路との間で、走行時間、走行距離、走行費用の差あるいは比などをパラメーターとして、
新設道路への転換交通量を求める方法が発達した。パラメーターと転換交通量との関係は転換率
曲線によって表わされ、その代表的なものにはデトロイトの転換率曲線⁴⁾、カリフォルニアの転換
率曲線⁵⁾、AASHOの転換率曲線などがある。

転換率曲線を用いた配分は高速道路やバイパスへの転換交通量を求めるのには適しているが、
市街地の道路網に適用すると、利用可能ないくつもの経路のうち単に代表的な経路しか考慮され
ないし、またその経路の選択がはなはだ恣意的であるという欠点をもっていた。たまたま1957
年にDantzig⁶⁾ およびMoore⁷⁾ によって最短経路探索法が発表されて以来、電子計算機の普及と
ともに大規模ネットワークでの交通量配分が可能となってきた。

初期の代表的なものは all or nothing 法と呼ばれる方法⁸⁾である。これはトリップの起点か
ら終点までの時間、距離、その他のコストによって表わされる抵抗値が最小の経路にすべてのO
D交通量を配分するものである。抵抗値としては通常、所要時間のみが考慮される。この方法で
は起終点間の最短経路を見つけることだけが問題であり、実際の計画では実用性という点でLP
を用いるDantzigの方法よりも優れているMooreの方法が利用されてきた。

all or nothing 法では、ある特定の区間に交通量が集中するという現象が起りがちである。これは初めに仮定された所要時間が、配分交通量の増加に対しても一定に保たれるためである。実際にはある区間の交通量が増えてくると走行速度が低下し、所要時間が増えるのでその区間を回避するようになってくる。そこで交通量－走行速度曲線を用いて、配分された交通量により逐次走行速度と所要時間を修正するという配分方法がとられるようになってきた。このような方法にはOD交通量を分割する方法と、繰り返し反復計算を用いる方法とがある。

分割配分法には、OD表の分割の仕方と所要時間の修正式の相違によっていくつかの方法がある。CATS (Chicago Area Transportation Study) の方法ではOD表を発生ゾーン⁹⁾によって分割し、特別な順序で選ばれた発生ゾーンからのOD交通量を配分するたびに容量制限式によって所要時間が修正される。PATS (Pittsburgh Area Transportation Study) の方法でもOD表は発生ゾーンによって分割されるが、配分順序はランダムに選ばれる。交通量－走行速度式はHCMの実用交通容量に基いたものが用いられている。MIT法ではすべてのODペアに対してOD表が均等に n 等分される。1回の配分ごとにOD表の成分の $1/n$ ¹¹⁾が配分され、所要時間が修正される。 n としては普通7～10程度が用いられている。

OD表を発生ゾーンによって分割する場合、配分する発生ゾーンの順序によって配分交通量が異なるという欠点がある。またその順序についても適切な選び方がないようである。MIT法ではこの欠点は是正されるが、最短経路樹の作成回数がそれだけ多くなる。交通量の所要時間に与える影響が不連続にならないようにするためには、分割数はできるだけ多い方がよい。しかしあまり多くても影響が微小になり、いたずらに最短経路樹の作成回数を増すだけである。いままでのところ適正な分割数は経験的にしか得られていない。

分割配分法では徐々に交通量が配分され、上積みされていくのに対し、反復計算を用いる方法では初めから全交通量が配分され、これが次第に修正されていく。その際の修正の仕方によっていくつかの方法がある。BPR (Bureau of Public Roads) 法では、配分交通量から所定の交通量－走行速度式によって走行時間が修正され、新たな最短経路が求められる。配分は常にall or nothingによって行れ、この操作は平衡状態に達するまで続けられる。したがって最終的には唯1本の経路にのみ配分されることになる。TRC (Traffic Research Corporation) 法では、各回の最短経路探索によって得られた経路の所要時間の逆数に比例して交通量が配分される。¹³⁾ Wayne 法では、各回の最短経路探索によって得られた経路に交通量が等分に配分される。¹⁴⁾ もしTRC法およびWayne法がともにある一定状態に収束するなら、最終的な状態ではTRC法とWayne法とは一致するはずである。M. J. Beckmanによれば、Wayne法は収

束することが期待でき、しかもそれは直観的に考えて等時間原則による解と一致するといわれている。

これらの反復計算を用いる方法の欠点は収束性が緩慢な点にある。実用的には数回の反復で十分であるといわれているが、反復回数が多くなるほど最短経路樹の作成回数が増えることは当然である。反復計算法の収束性を改良するために最近非線形計画法を用いる方法が開発されてきている。

交通量の増加による走行速度の低下を考慮に入れて、運転者はトリップの起点と終点の間の走行時間が最短となる経路を選択すると仮定したとき、道路網上の交通流の分布はどのようなであろうか。J. G. Wardrop¹⁵⁾ は 1953 年にこの問題を初めて取り扱っている。Wardrop は、それまで用いられてきた all or nothing 法が、交通量の走行速度に及ぼす影響が考慮されていないため交通の現状を十分に反映していないことを指摘し、次の 2 つの配分原則を提案した。

- (1) 起終点間に存在する可能な経路のうち、利用される経路については所要時間が皆等しく、利用されないどの経路のそれよりも小さい。
- (2) 総走行時間は最小である。

この 2 つの配分原則のうち、(1) は運転者は起終点間の所要時間最短の経路を選択するという考え方に立つものであり、Wardrop の第 1 法則または等時間原則と呼ばれている。これは個人がトリップの走行時間という自己の損失を最小にしようとする行動をとる結果として、道路網上に現出する交通流分布の平衡状態を表わしたものである。この配分原則は、Wardrop 自身も述べているように非常に現実的であり、もっともらしい。

配分原則(2)はWardropの第2法則または総走行時間最小化原則と呼ばれる。各個人がトリップの走行時間を最小にする行動をとっても、走行時間の全トリップについての総和が最小になるとは限らない。もちろん道路の計画者の側からは、総走行時間が最小になるように道路網が利用されるのが理想であろう。したがって(2)は計画者の側から見た理想的な、いわば計画指向的な配分原則であって、実際の運転者の経路選択挙動を説明しようとするものではない。この意味で(2)は輸送計画的な配分と呼ばれることもある。

各種の分割配分法や反復計算を用いる各種の配分法も、大局的には交通量の走行速度に及ぼす影響を考慮に入れて、トリップを起終点間の走行時間最短の経路に流そうとするものであるから等時間原則による配分の近似計算法ないしはシミュレーションであると考えることができる。しかし等時間原則にしたがう厳密解を求めることは容易ではなく、計算法を確立するための努力がなされてきている。

等時間原則では所要時間最短の経路にのみ交通量が配分されるため、所要時間が最短のそれよりも少しでも多くかかる経路には交通量は全く配分されない。等時間原則という概念はもともと各運転者がトリップの所要時間という損失を最小にしようとする理想化された状態での交通量分布を表わしており、そこでは経路の混雑状況や所要時間という情報が完全にゆきわたっているということが前提になっている。しかし現状では運転者が経路の途中の混雑状況や所要時間を十分に把握しているとはいえないので、必ずしも所要時間最短の経路を選択しているとは限らない。むしろ所要時間最短の経路を中心として、それよりも所要時間の上回る経路にもある程度交通量が分布していると考えるべきであろう。

時間比配分と呼ばれる方法は、起終点間の所要時間の短い経路ほど、その経路の選択率が高くなるという考え方に立つものであり、最短経路との所要時間比をパラメーターとして配分が行われる。もちろん走行時間が交通量の影響を受けることを前提にする方がより現実的であることは言うまでもない。時間比配分モデルのうち、わが国で開発された加藤モデル¹⁵⁾、星野モデルでは¹⁶⁾、所要時間の他に費用や快適性が経路の経済評価の要因としてとりあげられており、フローの連続条件式と経済評価値の関数として与えられる配分率から配分交通量を求めようとしている。両モデルの相違点は、経済評価値を与える関数および計算法の違いにあるようである。

時間比配分法では起終点間の妥当な経路を前もって与えなければならない。これはネットワークが大きくなってくるとはなはだ困難となってくるし、また著るしく恣意的でもある。運転者は経路の混雑状況や所要時間を十分に熟知しているとは言えないし、交通状況自体もまた日に日に変化するものである。したがって道路区間の実際の所要時間も、ドライバーの想定する所要時間も、何らかの分布をしていると考えられる。¹⁷⁾Burrell による最近の方法では、ドライバーの各道路区間に対する想定走行時間が、実際のリンクの走行時間を平均値とし、そのまわりのある範囲内に分布する8個の値をもつ矩形分布からランダムに取り出される。この想定走行時間からある起点を原点とする最短経路樹が作成され、その起点からのOD交通量が配分される。走行時間にある種の分布形を仮定する方法には興味深いものがあるが、実際には交通の混雑はある程度の長さあるいは範囲で連続して起っているのが普通であるから、各道路区間ごとに独立に走行時間を与えるということでは現状を十分に反映しえない面がある。

以上のような配分法の他に、たとえば吸収マルコフ過程によって道路網上の交通流分布を求める方法や、¹⁸⁾OD交通量と配分交通量とを同時に求めようとする方法がある。^{19), 20), 21)}また統計力学とのアナロジーによって、エントロピーを最大にするような交通流分布を求める方法²²⁾も提案されている。

1.3 本研究の概要

本文は7章より成っており、その内容は次の通りである。

第1章では本研究の意義と目的を述べ、交通量配分に関する従来の研究の概要を説明した。

第2章では交通量配分の前提となる事項を述べ、ネットワークフローとしての取り扱い方を説明する。また等時間原則による交通量配分に関する従来の研究の概要を述べる。つぎに等時間原則による交通量配分の定式化を行い、問題の特性を明らかにする。

第3章では、交通量と走行時間の関係を線形に仮定した場合の等時間原則による交通量配分の計算法を述べる。またその計算法の基礎となっている経路の一次独立性に関する性質を説明する。

第4章では交通量と走行時間の関係を非線形に仮定した場合の等時間原則による交通量配分の計算法を述べ、その問題点を明らかにする。

第5章では交通量配分と道路網計画に関連するいくつかの問題を取り扱う。まずWardropによる2つの配分原則の関連性を述べる。つぎに等時間原則による交通量配分で問題となるパスフローの非唯一性と解の存在性について考察を行う。

第6章では等時間原則による交通量配分の近似計算法と考えられる分割法に関する考察を行う。ここでは分割法の計算の意味および計算の効率化のための手法を説明する。

第7章では、以上の研究で得られた成果ならびに今後に残された課題を述べる。

第2章 等時間原則交通量配分における基本的事項

2.1 道路網の代数的表示^{23),24)}

交通量配分の問題を定式化し、計算機によって演算を行うためには道路網を代数的に表示しなければならない。そのために通常グラフ理論が用いられる。グラフ理論は頂点の集合と頂点相互を結ぶ線分の集合よりなるグラフの諸性質を解析する理論である。

グラフ理論では集合 X と X を X 自身に写像する関数 Γ の対がグラフと定義されている。いま x, y を集合 X に属する2点とすると、 $y \in \Gamma x$ であれば x から向きをつけた線分で y に結ぶことができる。 X の各要素はベルテックス、ノードなどと呼ばれ、一方 $y \in \Gamma x$ なる対 (x, y) はアークと呼ばれる。アーク (x, y) に対し、 x を始頂点、 y を終頂点という。アーク (x, y) の集合を U とするとグラフは $G = (X, U)$ と表わされる。グラフ $G = (X, U)$ において、各アークの終頂点が次のアークの始頂点となるようなアークの列 (u_1, u_2, \dots) をパスという。有限なパス (u_1, u_2, \dots, u_k) において u_1 の始頂点が u_k の終頂点に一致するものをサーキットという。

グラフ $G = (X, U)$ において、 $(x, y) \in U$ または $(y, x) \in U$ であるような x, y の対はエッジ、リンクなどと呼ばれる。リンクの集合を U で表わす。アークが方向をもつものに対してリンクは方向をもたない。ノードとアークよりなる方向性を有するグラフ $G = (X, U)$ は有向グラフと呼ばれ、それに対しノードとリンクよりなる方向性を有しないグラフ $G = (X, U)$ は無向グラフと呼ばれる。無向グラフ $G = (X, U)$ において、各リンク u_k が前のリンク u_{k-1} と1つの頂点を共有し、後のリンク u_{k+1} と他の1頂点を共有するようなリンクの列 (u_1, u_2, \dots) をチェーンまたはルートと呼ぶ。頂点 x に始まり、同じ頂点 x に終る有限なルートをサイクルという。唯一のアークよりなるサーキットまたは唯一のリンクよりなるサイクルはループと呼ばれる。

本文では交通量配分理論における慣習にしたがい、頂点をノード、線分を方向を有する場合にはアーク、方向を有しない場合にはリンク、アークの列をパス、リンクの列をルートと呼ぶことにする。

さて道路網は、路線の結節点と相隣接する結節点間の道路区間との集合よりなる。したがって道路網をグラフとして表わす場合には、交差点、インターチェンジなど路線の結節点がノードと

なり、結節点間の道路区間がリンクとなる。一方通行路のように、流れが一方向にしか許されていない場合には道路区間はアークとして表わされる。

グラフの結合状態はインシデンスマトリックスによって表わされる。有向グラフ $G = (X, U)$ に対し、インシデンスマトリックス $S = (s_{ij})$ を次のように定義する。

$$s_{ij} = \begin{cases} 1; & \text{アーク } j \text{ の始頂点がノード } i \text{ であり、しかもアーク } j \text{ がループでないとき、} \\ -1; & \text{アーク } j \text{ の終頂点がノード } i \text{ であり、しかもアーク } j \text{ がループでないとき、} \\ 0; & \text{その他のとき。} \end{cases}$$

無向グラフ $G = (X, U)$ に対しては次のように定義される。

$$s_{ij} = \begin{cases} 1; & \text{ノード } i \text{ がリンク } j \text{ の頂点であり、しかもリンク } j \text{ がループでないとき、} \\ 0; & \text{その他のとき。} \end{cases}$$

パス、ルートを代数的に表示するためには、パスマトリックス、ルートマトリックスを用いる。始頂点、終頂点の対 i に対し、そのパスマトリックスまたはルートマトリックス $R^i = (r_{kj}^i)$ を次のように定義する。

$$r_{kj}^i = \begin{cases} 1; & \text{アーク } j \text{ (リンク } j) \text{ がパス } k \text{ (ルート } k) \text{ に含まれるとき、} \\ 0; & \text{アーク } j \text{ (リンク } j) \text{ がパス } k \text{ (ルート } k) \text{ に含まれないとき。} \end{cases}$$

インシデンスマトリックスによって道路網が完全に記述され、またパスマトリックス、ルートマトリックスによって都市間の経路が表示される。インシデンスマトリックス、パスマトリックス、ルートマトリックスに関する諸性質は後に述べることにする。

交通量配分理論では、通常交通はノードにおいてのみ発生し、吸引されるとしている。実際には道路区間のあらゆる部分から交通が発生し、またあらゆる部分に吸引されるが、解析上の簡単のため、ノードにおいてのみ交通の発生、吸引を許しているのである。これによってひとつの道路区間内では交通流は一樣であるとみなすことができる。

実際の交通量配分計算では、すべてのノードにおいて交通を発生させ、また吸引させるわけではない。できるだけ OD ペアーの数を減らして計算量を軽減させるため、特定のノードにおいてのみ交通を発生、吸引させる。その他のノードは路線の結節点であり、そこでは交通はただ通過させるだけである。

2.2 交通量配分における変量の取り扱い

グラフ理論は、頂点と線分よりなる図形自身のもつ諸性質を解析する理論であるが、交通量配分理論のようにグラフ上の物質の流れを取り扱うものをとくにネットワーク理論といっている。

電気回路網理論、構造解析理論などネットワーク理論に属するものは多く、解析上の共通点も数多く見られる。

電気回路網における電気の流れや、水道の管路網における水の流れのように、ネットワーク上における唯一種の物質の流れをシングルコモディティーフローと呼んでいる。シングルコモディティーフローでは、フローのどの部分も他と区別することができないので、発生と吸収の総量が一致すればよい。それに対し、ネットワーク上における複数の種類の物質の流れをマルチコモディティーフローという。マルチコモディティーフローでは、コモディティーごとの発生量と吸収量が合致しなければならない。このため解析は非常に複雑になってくる。

交通量配分は、道路網上における自動車の流れを取り扱うものであるが、起終点交通量が定められているので、起終点の対ごとに発生量、吸収量が合致しなければならない。このため交通量配分はマルチコモディティーフローの問題となる。

交通量配分における変数の取り扱いには2種類ある。ひとつは各道路区間を流れる交通量を変数にするものであり、有向の場合にはアークフロー、無向の場合にはリンクフローと呼ばれる。これにも起終点の対ごとに変数を設定するものと、各起点ごとに変数を設定するものの2通りある。もちろん変数のとり方によってフローの連続条件式が変わってくる。

起終点の対ごとに、各道路区間を流れる交通量を変数にしたときにはフローの連続条件式は次のようになる。

$$\sum_k (x_{jk}^i - x_{kj}^i) = \begin{cases} S^i & ; j \text{ が起終点の対 } i \text{ の発生ノードのとき、} \\ -S^i & ; j \text{ が起終点の対 } i \text{ の吸引ノードのとき、} \\ 0 & ; j \text{ が通過ノードのとき。} \end{cases} \quad (2.1)$$

ここに、 x_{jk}^i ; 起終点が i でアーク jk を流れる交通量
 S^i ; 起終点が i の O D 交通量

一方、各起点ごとに、各道路区間を流れる交通量を変数にすると、フローの連続条件式は次のようになる。

$$\sum_k (y_{jk}^i - y_{kj}^i)$$

$$= \begin{cases} U^i & ; \quad i \text{ が起終点 } i \text{ の発生ノードのとき,} \\ -S^{ij} & ; \quad \text{その他のとき.} \end{cases}$$

(2.2)

ここに、 y_{jk}^i : i に起点を有し、アーク jk を流れる交通量

U^i : i の発生交通量

S^{ij} : i に起点、 j に終点を有するOD交通量

このような一点集中型フローの積み重ねによるマルチコモディティフローはマルチコピーフローと呼ばれる。

アークフローを変数にすると、フローの連続条件式が簡単明瞭に表わされるという利点がある。しかしその反面、変数の数および連続条件式の数が膨大になってくる。 n 個のノードと m 個のアークおよび s 個の発生、吸引点を有するネットワークでは、変数および連続条件式の数は表2.1に示ようになる。一般に電子計算機による演算では、膨大な数の変数と方程式からなる体系を直接解くよりも、問題を組み換えて変数と方程式の数を

極力減らし、簡単な計算を数多く繰り返す方がはるかに能率の良いことが多い。このため配分計算ではアークフローを変数にすることは計算機の記憶容量、演算時間の上で問題が多く、実際にはほとんど用いられない。

	起終点の対ごとにアークフローを設定	起点ごとにアークフローを設定
変数の数	$ms(s-1)$	ms
連続条件式の数	$ns(s-1)$	ns

表2.1 変数および連続条件式の数

交通量配分におけるもうひとつの変数の取り扱い方として、経路ごとの交通量を変数にする方法がある。これは有向の場合にはパスフロー、無向の場合にはルートフローと呼ばれる。パスフロー、ルートフローは、起終点間における経路に沿う連続した流れを表わしているから、発生、吸引点における連続条件式のみが必要で、他の中間ノードにおける連続条件式は不要である。したがって連続条件式は次のようになる。

$$\sum_k x_k^i = S^i \quad (2.3)$$

ここに、 x_k^i : 起終点 i で経路 k を流れる交通量

S^i : 起終点 i のOD交通量

式(2.3)はOD条件式と呼ばれることもある。パスフローを変数にすると、変数の数および連続条件式の数が著るしく少なくなる。もっとも起終点間のすべての経路を対象としているわけであるが、実際計算上必要なのは交通量の流れる経路のみであるから。したがって経路交通量を変数

にするときには、膨大な数の経路のうちからいかに交通量の流れる経路を見つけ、変数を少くさせるかというところにポイントがあると言えよう。

2.3 凸極性に関する性質と定義 ^{25), 26), 27)}

ここでは交通量の均衡分布について論じる際に基礎となる数理計画理論における凸極性に関するいくつかの定義および定理をまとめておく。

定義1

集合 S 内のどの2点 $x^{(1)}, x^{(2)}$ をとっても、その2点を結ぶ線分がその集合内にあるとき、集合 S は凸であるという。すなわち、

$$x^{(1)}, x^{(2)} \in S \quad \text{ならば} \quad 0 \leq \lambda \leq 1 \quad \text{に対して} \\ \lambda x^{(2)} + (1-\lambda) x^{(1)} \in S \quad (2.4)$$

定義2

関数 $f(x)$ の1次補間が、その補間点における関数の真の値を下まわらないとき、 $f(x)$ は凸関数であるという。したがって凸関数 $f(x)$ は $0 \leq \lambda \leq 1$ に対して

$$f[(1-\lambda)x^{(2)} + \lambda x^{(1)}] \leq (1-\lambda)f(x^{(2)}) + \lambda f(x^{(1)}) \quad (2.5)$$

を満たす。— $f(x)$ が凸関数であるとき、 $f(x)$ は凹関数であるという。

定義3

定義2において、どの $x^{(1)} \neq x^{(2)}$ についても不等号がなりたつとき、 $f(x)$ は狭義の凸であるという。

定理1

任意の2点 $x^{(1)}, x^{(2)}$ について

$$f(x^{(2)}) \geq f(x^{(1)}) + \nabla f(x^{(1)})^T (x^{(2)} - x^{(1)}) \quad (2.6)$$

が成り立つとき、 $f(x)$ は凸関数である。

定理2

凸集合 S において $f(x)$ が2回連続微分可能のとき、 $f(x)$ は次に示すヘッシアン行列

$$H_{ij}(x) = \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_i \partial x_j} \quad (2.7)$$

が S 内の任意の点 x において半正値行列となり、かつそのときにかぎって凸関数である。もし $H(x)$ が正値行列であれば $f(x)$ は狭義の凸である。

定理3

$g(x)$ が凹関数のとき、条件 $g(x) \geq 0$ を満たす点の集合 S は凸集合である。

定義4

$f(x)$ が定義されている領域 R の点 \bar{x} は、いかなる $x \in R$ においてもつぎの不等式が成り立つとき、 R の大域的最小点であるという。

$$f(\bar{x}) \leq f(x) \quad x \in R \quad (2.8)$$

定義5

$S = \{x \mid 0 < \|x - \bar{x}\| < \varepsilon\}$ のいかなる点 x においても

$$f(\bar{x}) \leq f(x) \quad x \in S \quad (2.9)$$

となる $\varepsilon \geq 0$ が存在するとき、 \bar{x} は関数 $f(x)$ の局所的最小点という。

定理4

凸集合 S において到達した凸関数 $f(x)$ の局所的最小点は、大域的最小点である。

定理5

狭義の凸関数 $f(x)$ は、凸集合 S において唯一の最小点をもつか、あるいは下に有界でない。

定義6

n 次元ベクトル x と、 m 次元ベクトル λ の関数 $\phi(x, \lambda)$ が $[x^0, \lambda^0]$ と x^0 の ε 近傍のすべての点 x 、 λ^0 の ε を近傍のすべての点 λ に対してつねに

$$\phi(x^0, \lambda) \leq \phi(x^0, \lambda^0) \leq \phi(x, \lambda^0) \quad (2.10)$$

を満たすとき、 $\phi(x, \lambda)$ は $[x^0, \lambda^0]$ で鞍点をもつという。ここで x, λ は非負のベクトルであるとし、 $\phi(x, \lambda)$ は連続的偏微分可能であるとする。

補題1

$[x^0, \lambda^0]$ が $\phi(x, \lambda)$ の鞍点であるための必要条件は、次の2つの式が成立することである。

$$\nabla_x \phi \big|_{x=x^0, \lambda=\lambda^0} \geq 0 \quad (\nabla_x \phi, x) \big|_{x=x^0, \lambda=\lambda^0=0, x^0 \geq 0} \quad (2.11)$$

$$\nabla_\lambda \phi \big|_{x=x^0, \lambda=\lambda^0} \leq 0 \quad (\nabla_\lambda \phi, \lambda) \big|_{x=x^0, \lambda=\lambda^0=0, \lambda^0 \geq 0} \quad (2.12)$$

補題2

$[x^0, \lambda^0]$ が $\phi(x, \lambda)$ の鞍点であるための十分条件は、すべての $x \geq 0$ と $\lambda \geq 0$ に対して、上の2つの式および

$$\phi(x, \lambda^0) \geq \phi(x^0, \lambda^0) + (\nabla_x \phi \big|_{x=x^0, \lambda=\lambda^0}, x - x^0) \quad (2.13)$$

$$\phi(x^0, \lambda) \leq \phi(x^0, \lambda^0) + (\nabla_\lambda \phi \big|_{x=x^0, \lambda=\lambda^0}, \lambda - \lambda^0) \quad (2.14)$$

が成り立つことである。

定理 6 (Kuhn - Tucker 定理)

目的関数 $f(x)$ が凸関数であり、 $g_i(x)$ [$i = 1, 2, \dots, m$] がすべて凹関数で、かつ連続的微分可能であるとする。このとき $g(x) \geq 0$ かつ $x \geq 0$ のもとで、 $f(x)$ が x^0 で最小となるための必要十分条件は、ある $\lambda^0 \geq 0$ が存在して、 $[x^0, \lambda^0]$ がラグランジェ関数

$$\phi(x, \lambda) = f(x) - (\lambda, g(x)) \quad (2.15)$$

の鞍点であることである。

補題 2 は、 $\phi(x, \lambda)$ は x に関して凸関数であり、 λ に関して凹関数であることを示している。補題 1, 2 および定理 6 をまとめると次のようになる。

目的関数 $f(x)$ が凸関数であり、 $g_i(x)$ ($i = 1, 2, \dots, m$) がすべて凹関数で、かつ連続的微分可能であるとする。このとき、 $g(x) \geq 0$ 、かつ $x \geq 0$ のもとで $f(x)$ が x^0 で最小となるための必要十分条件は、ある $\lambda^0 \geq 0$ が存在して、 $[x^0, \lambda^0]$ がラグランジェ関数、

$$\phi(x, \lambda) = f(x) - (\lambda, g(x)) \quad (2.16)$$

に対し、次式が成り立つことである。

$$\nabla_x \phi \big|_{x=x^0, \lambda=\lambda^0} \geq 0 \quad (\nabla_x \phi, x) \big|_{x=x^0, \lambda=\lambda^0=0, x^0 \geq 0} \quad (2.17)$$

$$\nabla_\lambda \phi \big|_{x=x^0, \lambda=\lambda^0} \leq 0 \quad (\nabla_\lambda \phi, \lambda) \big|_{x=x^0, \lambda=\lambda^0=0, \lambda^0 \geq 0} \quad (2.18)$$

Kuhn - Tucker 定理は、不等式制限条件のもとで目的関数が最小値をとるための必要十分条件を述べたものであるが、等式制限条件のもとでは次のような形をとる。

系 1

目的関数 $f(x)$ が凸関数であり、 $g_i(x)$ ($i = 1, 2, \dots, m$) がすべて凹関数で、かつ連続的微分可能であるとする。このとき $g(x) = 0$ かつ $x \geq 0$ のもとで $f(x)$ が x^0 で最小となるための必要十分条件は、ラグランジェ関数

$$\phi(x, \lambda) = f(x) - \sum_{i=1}^m \lambda_i g_i(x) \quad (2.19)$$

に対し、次式が成り立つことである。

$$\nabla_x \phi \big|_{x=x^0, \lambda=\lambda^0} \geq 0, \quad (\nabla_x \phi, x) \big|_{x=x^0, \lambda=\lambda^0=0, x^0 \geq 0} \quad (2.20)$$

$$\nabla_\lambda \phi \big|_{x=x^0, \lambda=\lambda^0} = 0 \quad (2.21)$$

上式では λ に非負制約はない。

なお定理 2 に関して、行列 H が半正定値とは、 $x \neq 0$ に対して次式が成り立つことである。

$$x^t H x \geq 0 \quad (2.22)$$

不等号が成り立つときには正定値であるという。

2.4 走行時間関数

等時間原則による交通量配分では、道路区間の走行所要時間が交通量によって変化することが前提となっている。

一般に交通流理論では、空間平均速度と交通密度との間に強い相関性のあることが認められており、交通密度が大きくなると速度は低下してくる。一方、交通量は交通密度と空間平均速度との積に等しい。したがって交通量、交通密度、平均速度の関係は図 2.1 に示すようになる。交通量の増加とともに平均速度は低下してくるが、ある

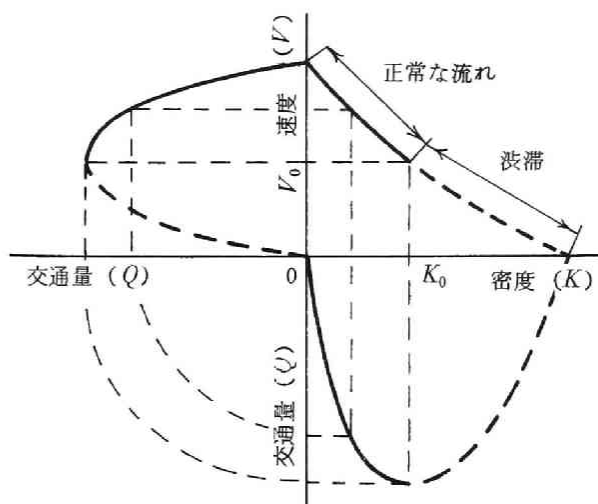


図 2.1 交通量、速度、密度の関係

点で交通量はピークに達し、それから後は渋滞領域に入り、交通量も低下してしまう。ある距離 L を走行するのに要する所要時間は、 $T = L / V$

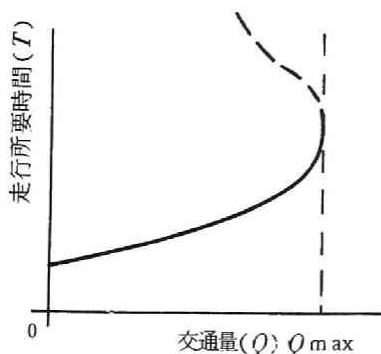


図 2.2 交通量、走行所要時間の関係

であるから、交通量と走行所要時間との関係になおすと図 2.2 のようになる。つまり、正常な流れでは、交通量の増加とともに走行所要時間も増加する。交通管制のための特殊なボトルネックの解析を除いて、交通計画では正常な流れを対象としているので、渋滞領域は考えない。したがって道路区間の走行所要時間 $f(x)$ は交通量 X に関する単調増加関数として与えられる。この関数 $f(X)$ は走行時間関数または容量関数と呼ばれる。

2.5 等時間原則による交通量配分の計算法に関する 従来の研究の概要とその問題点

J. G. Wardrop²⁸⁾ によって等時間原則という概念が提案されて以来、この配分原則の合理性のゆえに、その実用化のためのさまざまな努力がなされてきた。それにもかかわらず、いまだ理論的に明解でかつ十分実用的な計算法は存在しない。

この原則にしたがう配分計算を行う際の難しい点は、道路区間の走行時間は交通量によって変化するので、トリップの起終点間の最短経路が前もってわからないということにある。つまり交通量の流れる経路と流れない経路との判別が前もってできないわけで、そのために適当な変数の設定が困難となるのである。それゆえ道路網中のすべてのノードペア間の最短経路のパターンを見出すことが、等時間原則による交通量配分で一番重要な問題となる。これまでに計算された各手法は、変数の設定や走行時間関数の相違を別にすれば、道路網中のフローパターンの見出し方に特徴があるように思われる。

W. W. Mosher²⁸⁾ は一種の試行錯誤によって交通量の流れる経路を求める方法を開発している。この方法では選択可能なすべての経路に対してパスフローが設定される。計算は連立方程式を逐次近似することによって行われるが、求解途上でパスフローがゼロに近づけば、その経路はとり除かれ新たなパスフローの値が求められる。一度とり除かれた経路でも、他の経路の走行時間よりも短いものが出てくれば、その経路は再び連立方程式に組み込まれる。こうした試行錯誤によって、等時間原則を満足するパスフローが求められるのである。

Mosher は簡単な例題でこの計算を行っているが、その詳細について不明な点が多い。またすべての可能な経路を対象にすると、ネットワークが大きくなるにしたがって変数の数が飛躍的に増大するので、とうてい実用的であるとはいえない。

パスフローを変数にすると解は一意的には決まらない。これはある区間交通量の値の組み合わせを実現するパスフローの組み合わせが無限に存在するためである。このため方程式を解く場合に不都合な点が多い。佐佐木²⁹⁾ は等時間原則による交通量配分問題を解くとき、OD条件式と等時間条件式だけでは解が一意的に決まらないため、配分比条件式を導入することを提案した。配分比条件とは、あるノードペア間でフローが2つ以上の経路に分流するとき、その分流するフローの比はそこで分流するすべてのODペアについて等しいという仮定である。道路網上を走るすべてのドライバーが交通状態に関する情報を均等に得ていると考えられるなら、このような仮定をおくことはさしつかえない。しかしこの条件式は高次の連立方程式となるため、計算が

っそうめんどろになることはさけられない。

パスフローが一意的でないのなら、一次独立な条件式の数だけの変数を残して、残りのパスフローの値は先決することができる。飯田³⁰⁾は情報不均等な立場、情報均等な立場での計算法を提案した。情報不均等な立場では、長距離ODほど途中の経路の混雑度に関する情報が少なくなるので、幹線道路を利用する傾向が強く、パスフローの値は先決することができるとしている。情報均等な立場では、佐佐木の配分比条件が成り立つとし、この場合の計算は情報不均等な立場から出発する。この計算法では等時間のフローパターンをいかに探索するかという問題が解決されていないし、また残されたパスフローがすべて正となるように、先決される変数の値を決めることができるか疑問である。

等時間原則による配分ではパスフローは一意的には決まらないが、区間交通量は唯一である。それゆえ区間交通量を変数にすることができれば解の一意性は保証されるし、また変数の数が著るしく少いという長所がある。ただOD交通量の需給関係を表わす方程式の樹立が困難であるという点と、フローパターンを如何に見い出すかという根本的な問題が残る。飯田^{31), 32)}はカット法と呼ばれる区間交通量を変数にした計算法を提案しているが、その特徴はOD交通量の需給方程式の樹立にある。いま道路網をある断面上で2分するとき、その切断線が任意の起終点間の経路を2回以上切っていないなら、その断面交通量の和は切断線の両側にある発生、吸引点間のOD交通量の和に等しいはずである。このOD交通量の需給関係を表わす方程式はカット条件式と呼ばれ、等時間条件式とカット条件式とがちょうど変数である区間交通量の数だけ存在すると報告している。この条件式を樹立するためにフローパターンを見い出す方法として、OD交通量の構成比を一定に保ちながら総交通量を徐々に増加させ、フローパターンの変化を追跡していくという方法を提案している。飯田のカット法は区間交通量を変数にするという点において画期的なものであるが、どのような場合にもこの方法が適用できるのか不明である。またフローパターンの変化を逐一追っていくのはあまりにも面倒であり、計算をすべて電子計算機によって行わせることができるかどうかという点にも問題を残している。

等時間原則にしたがう交通流分布は、ネットワークにおけるポテンシャルエネルギーを最小にする流れと多くの点で類似しているので、電気回路網理論とのアナロジーが可能である。佐佐木、三好³⁴⁾の研究では、交通量を電流に、道路区間の所要時間を電位差に、交通量一所要時間式をオームの法則に対応させている。既与の交通量一所要時間式、OD交通量に対して、道路網上の交通流の分布は、キルヒホッフの第1法則、第2法則の適用により行列演算で求められる。この方法の問題点としては、OD交通量が1点集中型の場合だけに限られること、任意のサイクルでは

必ずしもキルヒホッフの第2法則が成り立たないので、等時間のフローパターンを別の方法で求めなければならないことなどがあげられる。

等時間原則という概念は Wardrop によれば「実際に使用される経路については所要時間は皆等しく、使用されないどの経路のそれよりも小さい」と表現されている。これがフローの連続条件式および非負条件式のもとで、ある種の目的関数を最小にするものであることは Jørgensen³⁵⁾によって発見された。この Jørgensen の業績の評価はいくら強調しても強調しすぎることはないであろう。これによって等時間原則による配分は各種の最適化手法の適用が可能となり、計算法の発展は新たな段階を迎えた。

等時間原則による配分がある種の目的関数を最小にするものであれば、総走行時間最小化原則との間で何らかの関係がありそうである。両者は、走行時間関数を適当に変換することによってどちらの問題にも直すことができる。この事実は筆者によってすでに明らかにされているが、同時期に、Stella C. Daffermos³⁷⁾によっても明らかにされた。

Daffermos はさらに、等時間原則および総走行時間最小原則のいずれにも適用可能なアルゴリズム³⁸⁾を示し、この方法が収束することを証明している。Daffermos のアルゴリズムは次のようなものである。

1. 初期値を適当に設定し、走行時間を算定する。
2. 最大の所要時間をもつ経路 r と最小の所要時間をもつ経路 q とを見つける。
3. r から q へ δ だけの交通量を移す。交通量 δ は、 r の所要時間と q の所要時間とが等しくなるように決定される。ただし r のパスフローの値が上限となる。
4. 以上の計算を対象とする経路の所要時間が等しくなるまで続ける。

このアルゴリズムは O D ペアを順番に遷移させて行われ、最終的に区間交通量が収束するまで続けられる。Daffermos はさらに、ユーザーが異なるコスト関数をもついくつかの階層に分れているときの計算法を提案している。Daffermos の計算法の問題点は、ネットワーク中で配分の対象となる経路をどうして見つけてくるかということである。これは等時間原則による配分の他の多くの計算法についても共通した問題点である。

T. Leventhal, G. Nemhauser, L. Trotter, Jr.³⁹⁾ は、等時間原則による配分ではすべての可能な経路を対象とする必要のないことを示している。計算に必要な経路は毎回の最短経路探索によって得ることができ、前回の配分でフロー値がゼロとなった経路は捨ててもかわないと述べているが、これは特に真新しい内容ではない。筆者はすでに経路の一次独立性という概念により、有限個のパスフローの組み合わせによって解に到達しうることを示している。⁴⁰⁾

交通量の流れる経路を見つける方法は、Wayne 法のように毎回の最短路探索で見つけるよりよい方法は今のところ見あたらない。しかし新しい経路への交通量の配分比率はもっと改良の余地がありそうである。Earl R. Ruiter⁴¹⁾ は Wayne 法と類似した計算法を提案しているが、この方法では毎回の最短路探索によって求められた新しい経路への配分率 λ は、Jørgensen によって示された目標関数の 2 次の微小項までとった増分が最小になるように決められる。この方法の計算例は示されていないので収束の状態については不明である。ただ直観的に考えると、繰り返しの初めの方の段階では収束が緩慢すぎ、最終状態では収束が不安定となるように思われる。

最近の計算法の発展は、各種の最適化手法を導入することによって進められているが、ただ各種の最適化手法をそのまま適用すると計算機の記憶容量や計算時間の面で制約を受けるので、ネットワークでの計算に適した形に改めるためにいろいろな工夫がなされている。

Sang Hguyen⁴²⁾ はコンベックス・シンプレックス法を用いる計算法を発表している。この方法では起点ノードごとのリンクフローの和が変数となっており、起点ノードを順次遷移させて、起点ノードごとに最小化計算を行う。アルゴリズムの概要は次のようである。

1. ある実行可能解から出発する。
2. 各リンクのフロー値およびその両端の起点ノードからの所要時間が、満足せねばならない一定の条件を満たしているかをみる。
3. フロー値を最も能率よく改良することのできる変数をみつけ、フローを移しかえるための経路対を求める。
4. フローの移しかえは、移しかえることのできる交通量の上限内で目的関数が最も小さくなるように行われる。
5. 以上の計算を所定の条件を満足するまで続ける。

この計算法は一見めんどろであるが、すべて計算機により行わせることができる。376個のリンク、155個のノードよりなるHull市のネットワークでの計算例では、約10回の繰り返しによって十分の収束が得られている。

Larry T. LeBlanc, Edward K. Morlok, William P. Dierskalla⁴³⁾ は非線形計画法のFrank-Wolfe algorithm を用いる方法を提案している。この方法では目的地を同じくするトリップについてのリンクフローの和が変数とされており、そのアルゴリズムは次のようである。

1. 目的関数を線形近似し、所与の制約条件のもとで最小化する。
2. 1.によって得られた最適解は、もとの目的関数を最小化するための探索方向を決めるのに

用いられる。

3. 得られた探索方向への最小化を行う。これは一次元上での最小化問題となる。

4. 1.にもどる。

以上の計算は順次目的地ノードを遷移させ、区間交通量が収束するまで続けられる。この方法の有利性は線形計画が最短路探索によって解けるということにある。それゆえこのアルゴリズムでは最短路探索と一次元上の関数の最小化だけの計算となり、もとの非線形計画を逐次線形近似してシンプレックス法で解くよりもはるかに能率的である。現在知られている計算法のうちで最も効率的なものの1つである。

この他にも等時間原則による交通量配分の計算法はいろいろ研究されているが、最近の興味ある手法の発展がいずれも非線形計画法の適用によってなされていることは注目すべきことである。

Wardrop は等時間原則とともに総走行時間最小化原則を提案しているが、すでに述べたように走行時間関数の適当な変換によって、総走行時間最小化原則による配分は等時間原則による配分のアルゴリズムによって計算することができる。しかし両者の互換性が見い出されるまでは、総走行時間最小化原則による配分だけを対象とした計算法についても研究されていた。このうち、走行時間が交通量の影響を受けないいわゆるフローインディペンデントモデルについては、Pinnel & Saaty⁴⁴⁾、Beckman, McGuire & Winsten⁴⁵⁾、佐佐木⁴⁶⁾などによる線形計画法を用いる方法、Snell & Young⁴⁷⁾による最大原理を用いる方法などがある。

また走行時間が交通量の影響を受けるフローディペンデントモデルとしては、Cooper⁴⁸⁾、浜田⁴⁹⁾によるLagrangeの未定乗数法を用いる方法、最首、森脇⁵⁰⁾による単向グラフを用いる方法などがある。米谷、飯田、辻本は走行時間関数を線形に仮定して、2次計画法のWolfe⁵¹⁾の解法の適用を試みている。Wolfeの解法では計算に用いる変数の数が実変数の数倍となるので、計算時間、記憶容量の面で制約を受け、ごく簡単な例でしか解が得られていない。

最近では、等時間原則と総走行時間最小化原則の互換性がわかっているので、計算法はどちらの配分原則についても適用することができ、とくに総走行時間最小化原則による配分に適した計算法はみあたらないようである。

2.6 等時間原則による交通量配分の定式化

等時間原則による交通量配分は、N. O. Jørgensen³⁵⁾により数理計画問題として定式化されている。Jørgensenは等時間原則が次の2式に相当するとした。

$$t_{ij} + \lambda_i^{(k)} - \lambda_j^{(k)} \geq 0 \quad (2.23)$$

$$(t_{ij} + \lambda_i^{(k)} - \lambda_j^{(k)}) f_{ij}^{(k)} = 0 \quad (2.24)$$

ここに t_{ij} , $f_{ij}^{(k)}$ はそれぞれアーク ij の走行所要時間、 k に起点をもつアーク ij の交通量であり、 $\lambda_i^{(k)}$, $\lambda_j^{(k)}$ はそれぞれ起点 k からノード i 、ノード j に到る最短経路の走行所要時間である。式 (2.24) よりもし $f_{ij}^{(k)}$

が正であるなら

$$\lambda_j^{(k)} - \lambda_i^{(k)} = t_{ij}$$

が成り立ち、利用される経路については所要時間が最短であることを表わしている。また、もし $f_{ij}^{(k)}$ がゼロであるなら、

$$\lambda_j^{(k)} - \lambda_i^{(k)} \leq t_{ij}$$

であるから、アーク ij を含まない経路によってより早くノード j に到達することができ、したがってこのアークは使用されないことを表わしている。よって上の2式は等時間原則という概念に符合するものであるが、Jørgensen はこれが、フローの連続条件、非負条件のもとで、ある関数 S^* を最小化するときの Kuhn - Tucker 条件に他ならないことを見出した。関数 S^* は次式で与えられる。

$$S^* = \sum_{ij} \int t_{ij} df_{ij} \quad (2.25)$$

Jørgensen はアークフローを変数にとることによって等時間原則による交通量配分を最適値問題として定式化した。ここではパスフローを変数にとって同様の定式化を行う。

いま、起終点 i の OD 交通量を S^i , パス k を流れる交通量を x_k^i , パスの数を n^i , ゾーンペアの数を s , アークの数を m で表わすと、パスフローの和は OD 交通量に等しくなければならないから、

$$\sum_k x_k^i = S^i \quad (i=1, 2, \dots, s) \quad (2.27)$$

である。アーク j を流れる交通量 X_j は、パスフロー、パスマトリックスを用いて次のように表わされる。

$$X_j = \sum_i \sum_k r_{kj}^i x_k^i \quad (j=1, 2, \dots, m) \quad (2.28)$$

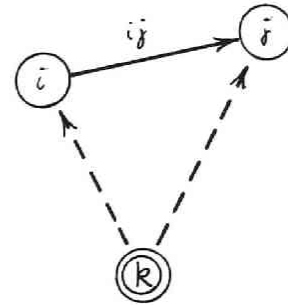


図2.3 ノード i, j, k とアーク ij

ここに、

$$r_{kj}^i = \begin{cases} 1; & \text{アーク } j \text{ が起終点 } i \text{ のパス } k \text{ に含まれる時、} \\ 0; & \text{アーク } j \text{ が起終点 } i \text{ のパス } k \text{ に含まれない時。} \end{cases}$$

パスフローはもちろん非負でなければならないので、

$$x_k^i \geq 0 \quad \left(\begin{array}{l} i = 1, 2, \dots, s \\ k = 1, 2, \dots, n^i \end{array} \right) \quad (2.29)$$

Jørgensen の指摘にしたがえば、等時間原則による交通量配分は、制約条件 (2.27), (2.28), (2.29) のもとで、次の目標関数を最小にする問題となる。

$$J = \sum_j \int_0^{X_j} f_j(\xi) d\xi \quad (2.30)$$

ここに $f_j(X_j)$ はアーク j の走行所要時間であり、交通量 X_j に関する単調増加関数として与えられるものとする。

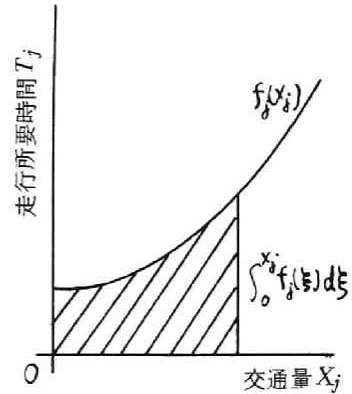


図 2.4 走行時間関数

2.7 等時間原則による交通量配分における解の一意性

等時間原則による交通量配分は、制約条件 (2.27), (2.28), (2.29) のもとで、目的関数 (2.30) を最小にする問題になった。

ところでこれらの制約条件式はすべて一次関数として与えられており、したがって制約条件を満足する点の集合は凸集合である。しかも空集合でないことは自明である。

目的関数 J の凸極性を調べるために X_j に関する偏微分をとると、

$$\begin{aligned} \frac{\partial J}{\partial X_j} &= f_j(X_j) \\ \frac{\partial^2 J}{\partial X_j \partial X_{j'}} &= \begin{cases} \frac{df_j(X_j)}{dX_j} & (j = j') \\ 0 & (j \neq j') \end{cases} \end{aligned} \quad (2.31)$$

よってヘッシアン行列 H は

$$H = \left(\frac{\partial^2 J}{\partial X_j \partial X'_j} \right) = \begin{pmatrix} \frac{df_1(X_1)}{dX_1} & & \\ & \frac{df_2(X_2)}{dX_2} & \\ & & \ddots \\ & & & \frac{df_m(X_m)}{dX_m} \end{pmatrix} \quad (2.32)$$

となる。関数 $f_j(X_j)$ は単調増加関数として与えられており、

$$\frac{df_j(X_j)}{dX_j} > 0 \quad (2.33)$$

任意の $y = (y_1, y_2, \dots, y_j, \dots, y_m)^t \neq 0$ に対して

$$y^t H y = \sum_j \sum_j y_j y'_j \frac{\partial^2 J}{\partial X_j \partial X'_j} = \sum_j y_j^2 \frac{df_j(X_j)}{dX_j} \quad (2.34)$$

y_j のうちには0でないものがあるから上式の値は正となる。

すなわち、

$$y^t H y > 0$$

よってヘッシアン行列 H は正値行列であり、 J は X_j に関して狭義凸関数となる。 J は下に有界であることは明らかであるから、 J の局部的最小点は大局的最小点に一致し、しかもそれらは唯一である。すなわち、等時間原則にしたがう区間交通量は一義的に定まる。

次に J の x_k^i に関する偏微分をとってみると、

$$\frac{\partial J}{\partial x_k^i} = \sum_j f_j \left(\sum_i \sum_k r_{kj}^i x_k^i \right) r_{kj}^i$$

$$\frac{\partial^2 J}{\partial x_k^i \partial x_{k'}^{i'}} = \sum_j \frac{df_j(X_j)}{dX_j} r_{kj}^i r_{k'j}^{i'}$$

よってヘッシアン行列 H は

$$H = \left(\frac{\partial^2 J}{\partial x_k^i \partial x_{k'}^{i'}} \right) = \left(\sum_j \frac{df_j(X_j)}{dX_j} r_{kj}^i r_{k'j}^{i'} \right) \quad (2.35)$$

となる。任意の $y = (y_1^1, y_2^1, \dots, y_k^i, \dots, y_{n^s}^{s_s})^t \neq 0$ に対して

$$\begin{aligned} y^t H y &= \sum_{i,k} \sum_{i',k'} y_k^i y_{k'}^{i'} \sum_j \frac{df_j(X_j)}{dX_j} r_{kj}^i r_{k'j}^{i'} \\ &= \sum_j \frac{df_j(X_j)}{dX_j} \sum_{i,k} \sum_{i',k'} y_k^i r_{kj}^i y_{k'}^{i'} r_{k'j}^{i'} \\ &= \sum_j \frac{df_j(X_j)}{dX_j} \left(\sum_{i,k} y_k^i r_{kj}^i \right)^2 \end{aligned} \quad (2.36)$$

上式において、任意の $y \neq 0$ に対して

$$\left(\sum_{i,k} r_{kj}^i y_k^i \right)^2 \geq 0 \quad (2.37)$$

である。いま、

$$\sum_{i,k} r_{kj}^i y_k^i = 0 \quad (j=1, 2, \dots, m) \quad (2.38)$$

とおくとき、 $y \neq 0$ となる解が存在するだろうか。

バスマトリックスの行要素をベクトルによって

$$r_k^i = (r_{k1}^i, r_{k2}^i, \dots, r_{km}^i)$$

と表わし、これをバスペクトルと呼ぶことにする。すると式 (2.38) は次のように書き換えられる。

$$\sum_{i,k} y_k^i (r_k^i)^t = 0 \quad (2.39)$$

ここでもしパスベクトル r_k^i ($k=1, 2, \dots, n^i$), ($i=1, 2, \dots, s$) が一次独立であるなら、

$$y = 0$$

となる。しかしもしパスベクトルが一次従属であるなら、

$$y \neq 0$$

となる解が存在する。パスベクトルが一次従属となるのは、所要時間の等しい代替経路が存在する場合である。したがって、全く所要時間の等しい代替経路が存在しない、すなわちすべての唯一の最短経路に交通が流れる場合にのみ式 (2.37) で不等号が成り立つ。よって一般的には、任意の $y \neq 0$ に対して

$$y^t H y = \sum_j \frac{df_j(X_j)}{dX_j} \left(\sum_{i,k} y_k^i r_{kj}^i \right)^2 \geq 0 \quad (2.40)$$

となるから、ヘッシアン行列 H は半正値行列であり、 J はパスフロー x_k^i に関して凸関数となる。 J の局所的最小点は大局的最小点に一致するが、狭義凸関数ではないので最小点は唯一ではない。すなわち等時間原則にしたがう経路交通量は一意的には定まらない。

2.8 Jørgensenによる目標関数最小化と交通流の均衡分布

Wardrop⁽¹⁾による等時間原則の定義は、“実際に使用される経路の所要時間は皆等しく、使用されないどの経路のそれよりも小さい。”というものであった。これは、各運転者が最も所要時間の短い経路を選択しようとする結果、もはや新たに経路変更を行っても所要時間を短くすることができないという均衡状態を表現したものである。ここではJørgensenによる目標関数最小化が、Wardropにより定義されている等時間原則という交通流の均衡分布に符合するものであることを示しておこう。

目標関数 (2.30) を式 (2.28) を用いて定積分で表わすと、

$$J = \sum_j \int_0^{\sum_k r_{kj}^i x_k^i} f_j(\xi) d\xi \quad (2.41)$$

となる。このとき制約条件はOD条件式 (2.27) およびフロー非負条件式 (2.29) である。ラグ

ランジェの未定常数を、 λ^i ($i=1, 2, \dots, S$) として次のラグランジェ関数をうる。

$$\phi = \sum_j \int_0^{\sum_i \sum_k r_{kj}^i x_k^i} f_j(\xi) d\xi - \sum_i \lambda^i \left(\sum_k x_k^i - S^i \right) \quad (2.42)$$

ϕ を x_k^i で偏微分すると、

$$\frac{\partial \phi}{\partial x_k^i} = \sum_j f_j \left(\sum_i \sum_k r_{kj}^i x_k^i \right) r_{kj}^i - \lambda^i \quad (2.43)$$

となる。

Kuhn-Tucker の定理より、目的関数 J が制約条件 (2.27) および (2.29) のもとで最小となるための必要十分条件は次式で与えられる。

$$x_k^i > 0 \text{ に対して } \frac{\partial \phi}{\partial x_k^i} = \sum_j f_j \left(\sum_i \sum_k r_{kj}^i x_k^i \right) r_{kj}^i - \lambda^i = 0 \quad (2.44)$$

$$x_k^i = 0 \text{ に対して } \frac{\partial \phi}{\partial x_k^i} = \sum_j f_j \left(\sum_i \sum_k r_{kj}^i x_k^i \right) r_{kj}^i - \lambda^i \geq 0 \quad (2.45)$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial \lambda^i} = - \sum_k x_k^i + S^i = 0 \quad (2.46)$$

$\sum_j f_j \left(\sum_i \sum_k r_{kj}^i x_k^i \right) r_{kj}^i$ は、ゾーンペア i の経路 k の走行所要時間に等しいから、

式 (2.44) は交通量の流れる経路については所要時間が等しいことを、式 (2.45) は交通量の流れない経路については所要時間がそれよりも大きいことを表わしている。

さて道路網を構成する各道路区間には、それ以上交通量が流れ得ない交通容量が存在する。アーク j の交通容量を C_j とすると、本来次の式を制約条件式に加えなければならない。

$$X_j \leq C_j \quad (2.47)$$

しかし 式 (2.47) を制約条件に加えることによって、問題の様相がかなり変ってくる。まず第1に、実行可能解が存在するのかどうか、すなわち与えられたOD交通量を道路網に流すことができるかどうかという問題が生じてくる。第2に均衡状態はどのようなものであるかが問題に

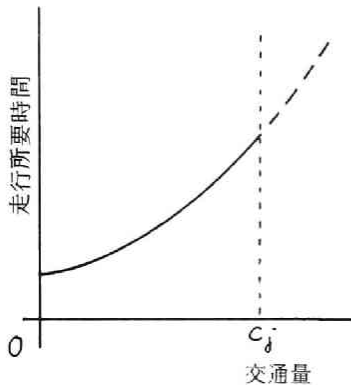


図 2.5 容量制限された走行時間関数

いま図 2.5 のような走行時間関数を考え、交通量は容量 C_j 以上には大きくなり得ないとしよう。走行時間は交通量が交通容量に到達しても有限値をとる。さて均衡状態を“実際に使用される経路については所要時間が皆等しく、使用されないどの経路のそれよりも小さい。”と定義すると、どこか 1 ケ所の

容量に達すると交通量はそれ以上に流れ得ないということになる。なぜなら、それ以上に交通量を流すと、使用される経路については所要時間が皆等しいという均衡状態に関する定義が満たされなくなるからである。これでは道路網としての容量が過小に評価されることになる。

次に、もはや最短経路に交通量を流すことができないときには次短経路に交通量を流すことにすると均衡状態は次のように定義しなおさなければならない。“実際に使用される経路のうち、容量に達した区間を含まない経路については所要時間が皆等しく、容量に達した区間を含む経路の所要時間はそれよりも小さく、しかもそれらは使用されないどの経路の所要時間よりも小さい。”と。しかしこのような定義ははなはだ非現実的である。なぜならそのような定義のもとでは、容量に到達した区間を含む経路の所要時間は他の経路のそれよりも小さいので、容量に到達した区間にさらに交通量が集中し、その結果渋滞をひき起こして所要時間が大きくなってしまいうからである。

したがって現実的には、容量に近づくとき所要時間が無限に大きくなる図 2.6 に示すような走行時間関数を考えなければならない。この場合均衡状態は最初の Wardrop による定義で十分である。ただし均衡解が存在するためには、制約条件に関して実行可能でなければならない。ところが、与えられた OD 交通量を道路網に流すことができるかどうかという問題はまだ十分に説明されておらず、実用的な判定基準は得られていない。それゆえ以下では均衡解が存在するものとして論を進めていくことにする。

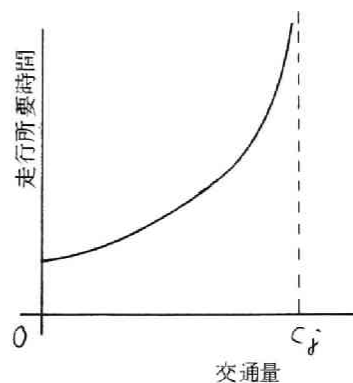


図 2.6 漸近線をもつ走行時間関数

第3章 線形走行時間関数の場合の等時間原則 による交通量配分計算法

3.1 計算法の概要

ある道路区間を走行するときの所要時間は、そこを流れる交通量の増加とともに増大するが、いまこの関係を一次式で表わすことにしよう。アーク j の交通量を X_j 、走行所要時間を T_j とすると、

$$T_j = a_j X_j + b_j \quad (3.1)$$

となる。ここに a_j, b_j はアーク j に固有の正の定数である。

このとき、最小とすべき目的関数は次のようになる。

$$\begin{aligned} J &= \sum_j \int_0^{\sum_i \sum_k r_{kj}^i x_k^i} f_j(\xi) d\xi \\ &= \sum_j \int_0^{\sum_i \sum_k r_{kj}^i x_k^i} (a_j \xi + b_j) d\xi \end{aligned} \quad (3.2)$$

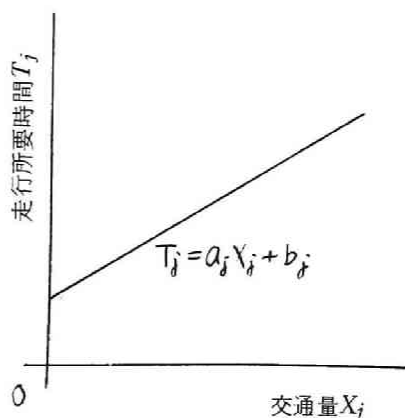


図3.1 線形の走行時間関数

制約条件は次の2式である。各アークの容量制約は設けない。

$$\sum_k x_k^i = S^i \quad (i=1, 2, \dots, s) \quad (3.3)$$

$$x_k^i \geq 0 \quad \left(\begin{matrix} i=1, 2, \dots, s \\ k=1, 2, \dots, n_i \end{matrix} \right) \quad (3.4)$$

ラグランジュの未定常数を t_0^i ($i=1, 2, \dots, s$) とすると、Kuhn-Tucker の定理より制約条件 (3.3), (3.4) のもとで目的関数 J が最小となるための必要十分条件は次式で与えられる。

$$\sum_j r_{pj}^i (a_j \sum_i \sum_k r_{kj}^i x_k^i + b_j) = t_0^i \quad (x_p^i > 0)$$

$$\begin{aligned}
\sum_j r_{pj}^\ell (a_j \sum_i \sum_k r_{kj}^i x_k^i + b_j) &\geq t_0^\ell \quad (x_p^\ell = 0) \\
\sum_p x_p^\ell &= S^\ell \\
x_p^\ell &\geq 0 \quad \left(\begin{matrix} \ell=1, 2, \dots, S \\ p=1, 2, \dots, n^\ell \end{matrix} \right)
\end{aligned} \tag{3.5}$$

上式を満足する x_p^ℓ のすべてを求めれば、等時間原則にしたがうパスフローが得られるのであるが、これははなはだ困難である。なぜなら第1に、必要十分条件は全ゾーンペアの考えられる全ての経路について同時的に成り立たなければならないが、初めから全ての経路を予め探索しておくことは明らかに不経済であり、また実際上困難であるからである。第2に、必要十分条件が不等式を含む連立方程式体系になっているため、容易に解が求まらないからである。したがって、

- (1) 計算に必要な経路のみをいかに有効に探索していくか。
- (2) 探索された経路に対して、不等式を含む連立方程式体系をいかに解くか。

が解決されなければならない。

いま目標関数を

$$J = J(x^1, x^2, \dots, x^i, \dots, x^s)$$

と置こう。ここに x^i は起終点 i のパスフローよりなるベクトルである。 J を最小にするために順次ベクトル x^1, x^2, \dots を使っていくことを考えよう。すなわちある極小化のステップではベクトル x^i のみを用い、他のゾーンペアのパスフローベクトルをすべて固定してしまうのである。これは一般的に緩和法 (relaxation) と呼ばれている方法であるが、目標関数が正値2次形式であれば収束することが証明されている。今の場合には区間交通量に関して目標関数が正値2次形式となるので、パスフローではなく区間交通量において収束することが期待される。

さて x^i のみを用いて J を極小化するとき、どのような降下方向を用いるのがよいであろうか。 J のパスフロー x_k^i に関する偏微分をとると、

$$\frac{\partial J}{\partial x_k^i} = \sum_j f_j(X_j) r_{kj}^i \tag{3.6}$$

となる。すなわち J の方向微係数は経路の所要時間に等しいから、これはどのような経路を探索し、計算に組み込んでくるかということになる。

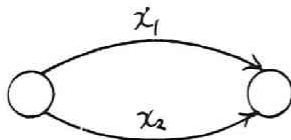


図3.2 2経路の場合の例

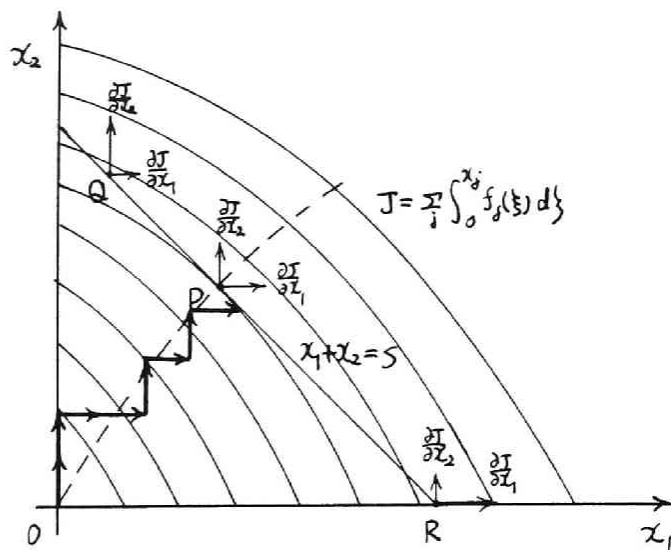


図3.3 2経路の場合の J 値のコンター

図3.3は簡単のため、2変数 x_1, x_2 の場合を例にして、 J の値に関する等高線を示したものである。制約領域

$$x_1 + x_2 = S$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

における J の最小点は P であり点 P においてはKuhn-Tucker定理より明らかなように、 x_1, x_2 両方向への方向微係数は等しい。点 Q においては x_1 方向より x_2 方向への方向微係数が大きく、この場合には x_2 を減少させるような方向に降下を行わなければならない。逆に点 R では x_1 方向より x_2 方向への方向微係数の方が小さく、この場合には x_2 を変数に組み込んで、 x_2 を増加させるような方向に降下を行わなければならない。一般的には、より方向微係数の小さな方向を見つけ、その方向に変数を増加させるように降下を行うのが得策であろう。それはより所要時間の小さな経路を見出し、その経路の交通量を増加させることによって、より均衡点に近づくということを意味している。したがって、あるゾーンペアに関して J を極小化するとき、そのまゝに最短路探索を行って方向微係数が最小の経路を求め、その経路を変数に組み込んで J の極小化を行うのが良い方法であるといえる。あるゾーンペアに関する J の極小化のステップごとに最短路探索を行うとそのたびに1本の経路が求まる。求まった経路が前に求まっておればそれは捨ててもかまわない。何回かのステップによって交通量の流れる経路が逐次探索され、その都度 J が極小化される。こうして次第に区間交通量が収束し、もはや新しい経路が求まらなく

なれば、それは等時間原則にしたがう状態すなわち交通量の流れる経路については所要時間が皆等しく、流れないどの経路のそれよりも小さいという状態にいたっているのである。この計算の過程は、運転者が常により所要時間の短い経路を求め、それに移っていくことによって次第に平衡状態に近づいていくプロセスに対応している。

3.2 計算のアルゴリズム

ここでは連立一次方程式、不等式の体系からなる Kuhn-Tucker 条件をいかに解くかということについて述べる。これは 2 次計画問題であるが、既存の手法を用いるのは必ずしも得策であるとはいえない。たとえばよく知られている Wolfe の解法では計算に用いる変数の数が実変数の数倍となり、計算に多大の時間がかかることになる。それよりもこの問題に適した解法を見出すべきであろう。

いま l 以外のパスフローベクトルをすべて固定し、 x^l のみを動かして J を極小化するものとする。このとき、ゾーンペア l の任意の経路 p の所要時間は次のように表わされる。

$$\begin{aligned} t_p^l &= \frac{\partial J}{\partial x_p^l} = \sum_j r_{pj}^l (a_j \sum_{i \neq l} \sum_k r_{kj}^i x_k^i + b_j) \\ &= \sum_j r_{pj}^l (a_j \sum_{i \neq l} \sum_k r_{kj}^i x_k^i + a_j \sum_k r_{kj}^l x_k^l + b_j) \\ &= \sum_k x_k^l \sum_j a_j r_{pj}^l r_{kj}^l + \sum_j r_{pj}^l (a_j \sum_{i \neq l} \sum_k r_{kj}^i x_k^i + b_j) \end{aligned} \quad (3.7)$$

式 (3.7) において、右辺第 1 項中の $\sum_j a_j r_{pj}^l r_{kj}^l$ は定数であるから、

$$\sum_j r_{pj}^l r_{kj}^l a_j = e_{pk}^l \quad (3.8)$$

とおく。また l 以外のゾーンペアのパスフローはすべて固定しているから右辺第 2 項も定数となり、これを

$$\sum_j r_{pj}^l (a_j \sum_{i \neq l} \sum_k r_{kj}^i x_k^i + b_j) = w_p^l \quad (3.9)$$

とおく。 e_{pk}^l w_p^l を用いると、式 (3.7) は次のように表わされる。

$$t_p^l = \sum_k e_{pk}^l x_k^l + w_p^l \quad (3.10)$$

したがって、ゾーンペア l について等時間原則にしたがうようなパスフローを得るためには、

$$\left. \begin{aligned} \sum_p x_p^l &= S^l \\ \sum_k e_{pk}^l x_k^l + w_p^l &= t_o^l \quad (x_p^l > 0) \\ \sum_k e_{pk}^l x_k^l + w_p^l &\geq t_o^l \quad (x_p^l = 0) \end{aligned} \right\} \quad (3.11)$$

の解 x_p^l を求めればよい。以下式(3.11)を解くアルゴリズムについて説明する。なお以下の説明中では、ゾーンペア l についてという意味の添字 l を省略する。アルゴリズムの原理は、式(3.11)の第1式を

$$\left. \begin{aligned} \sum_p x_p + Z &= S \\ Z &\geq 0 \end{aligned} \right\} \quad (3.12)$$

と書きかえ、 x_p が式(3.12)および式(3.11)の第2、第3式を満足するように保ちながら Z の値を S から逐次小さくして最後に0とすることである。いま $Z=Z^* > 0$ 、 $x_p = x_p^*$ ($p=1, 2, \dots, n$) のとき、次の式(3.13)が成り立つものとする。

$$\left. \begin{aligned} \sum_p x_p^* + Z^* &= S \\ \sum_k e_{pk} x_k^* + w_p &= t_o^*, \quad x_p^* \geq 0 \quad (p \in \mathcal{A}) \\ \sum_k e_{pk} x_k^* + w_p &\geq t_o^*, \quad x_p^* = 0 \quad (p \notin \mathcal{A}) \end{aligned} \right\} \quad (3.13)$$

ここに、 \mathcal{A} は経路番号の集合 $\mathcal{P} = \{1, 2, \dots, n\}$ の部分集合である。ここで、

$$\left. \begin{aligned} x_p &= x_p^* + \Delta x_p \\ Z &= Z^* - \Delta Z \quad (0 \leq \Delta Z \leq Z^*) \\ t_o &= t_o^* + \Delta t_o \end{aligned} \right\} \quad (3.14)$$

とするとき、

$$\left. \begin{aligned}
\sum_p x_p + Z &= S \\
\sum_k e_{pk} x_k + w_p &= t_0 \quad x_p \geq 0 \quad (p \in \mathcal{A}) \\
\sum_k e_{pk} x_k + w_p &\geq t_0 \quad x_p = 0 \quad (p \in \bar{\mathcal{A}})
\end{aligned} \right\} (3.15)$$

が成り立つような Δx_p , ΔZ , Δt_0 の範囲を求める。式 (3.14) を式 (3.15) に代入すると、

$$\left. \begin{aligned}
\sum_p x_p^* + \sum_p \Delta x_p + Z^* - \Delta Z &= S \\
\sum_k e_{pk} x_k^* + w_p + \sum_k e_{pk} \Delta x_k &= t_0^* + \Delta t_0 \\
x_p^* + \Delta x_p &\geq 0
\end{aligned} \right\} (p \in \mathcal{A})$$

$$\left. \begin{aligned}
\sum_k e_{pk} x_k^* + w_p + \sum_k e_{pk} \Delta x_k &\geq t_0^* + \Delta t_0 \\
x_p^* + \Delta x_p &= 0
\end{aligned} \right\} (p \in \bar{\mathcal{A}})$$

となる。上式は式 (3.13) より

$$\left. \begin{aligned}
\sum_p \Delta x_p - \Delta Z &= 0 \\
\sum_k e_{pk} \Delta x_k &= \Delta t_0, \quad x_p^* + \Delta x_p \geq 0 \quad (p \in \mathcal{A}) \\
\sum_k e_{pk} x_k^* + w_p + \sum_k e_{pk} \Delta x_k &\geq t_0^* + \Delta t_0 \\
\Delta x_p &= 0 \quad (p \in \bar{\mathcal{A}})
\end{aligned} \right\} (3.16)$$

となる。式 (3.16) の第2、第5式より

$$\left. \begin{aligned}
\Delta x_p &= \Delta t_0 \xi_p \quad (p \in \mathcal{A}) \\
\Delta x_p &= 0 \quad (p \in \bar{\mathcal{A}})
\end{aligned} \right\} (3.17)$$

をうる。ここに、 ξ_p は連立一次方程式

$$\sum_{k \in \mathcal{A}} e_{pk} \xi_k = 1 \quad (p \in \mathcal{A}) \quad (3.18)$$

の解である。補題 4 より行列 $E = (e_{pk})$ は正値行列であり、方程式 (3.18) は解をもつ。また補題 5 より

$$\sum_{p \in \mathcal{A}} \xi_p > 0 \quad (3.19)$$

式 (3.17) を式 (3.16) の第 1 式に代入すると

$$\Delta Z = \Delta t_0 \sum_{p \in \mathcal{A}} \xi_p \quad (3.20)$$

となるから、式 (3.14) より

$$0 \leq \Delta t_0 \leq \frac{Z^*}{\sum_{p \in \mathcal{A}} \xi_p} \quad (3.21)$$

でなければならない。

次に式 (3.17) を式 (3.16) の第 3 式に代入すると

$$x_p^* + \Delta t_0 \xi_p \geq 0$$

となる。上式は $\xi_p \geq 0$ となる p については常に成り立つから、上式の成り立つ Δt_0 の範囲は、

$$\Delta t_0 \leq -\frac{x_p^*}{\xi_p}, \quad (\xi_p < 0) \quad (3.22)$$

である。さらに式 (3.17) を式 (3.16) の第 4 式に代入すると、

$$\sum_k e_{pk} x_k^* + w_p + \Delta t_0 \sum_{k \in \mathcal{A}} e_{pk} \xi_k \geq t_0^* + \Delta t_0$$

となる。上式は $\sum_{k \in \mathcal{A}} e_{pk} \xi_k \geq 1$ となる p については常に成り立つから、上式の成り立つ Δt_0 の範囲は、

$$\Delta t_0 \leq \frac{\sum_k e_{pk} x_k^* + w_p - t_0^*}{1 - \sum_{k \in \mathcal{A}} e_{pk} \xi_k}, \quad \left(\sum_{k \in \mathcal{A}} e_{pk} \xi_k < 1 \right) \quad (3.23)$$

である。

以上をまとめると、式 (3.14) により与えられる x_p , Z , t_0 が式 (3.15) を満足するためには、方程式 (3.18) により与えられる ξ_p ($p \in \mathcal{A}$) に対して

$$0 \leq \Delta t_0 \leq \min (\theta_1, \theta_2, \theta_3)$$

であればよいことになる。ここに、

$$\left. \begin{aligned} \theta_1 &= \frac{Z^*}{\sum_{p \in \mathcal{A}} \xi_p} \\ \theta_2 &= \min_{\xi_p < 0, p \in \mathcal{A}} - \frac{x_{p_1}^*}{\xi_p} \\ \theta_3 &= \min_{\substack{\sum_{k \in \mathcal{A}} e_{pk} \xi_k < 1 \\ p \in \mathcal{A}}} \frac{\sum_{k \in \mathcal{A}} e_{pk} x_k^* + w_p - t_0^*}{1 - \sum_{k \in \mathcal{A}} e_{pk} \xi_k} \end{aligned} \right\} \quad (3.24)$$

である。いま、

$$\theta = \min (\theta_1, \theta_2, \theta_3) \quad (3.25)$$

とおくと、 Z は $\Delta t_0 = \theta$ に対して最も小さくなる。しかも補題6，補題7より、

$$\theta_1, \theta_2, \theta_3 > 0$$

であるから、 $\theta > 0$ となり

$$Z = Z^* - \Delta Z = Z^* - \theta \sum_{p \in \mathcal{A}} \xi_p < Z^* \quad (3.26)$$

が成り立つ。ここで

$$\theta = \theta_1 \quad (3.27)$$

のときには

$$Z = 0$$

となり、

$$\left. \begin{aligned} x_p &= x_p^* + \theta \xi_p & (p \in \mathcal{A}) \\ x_p &= 0 & (p \notin \mathcal{A}) \end{aligned} \right\} \quad (3.28)$$

はもとの式(3.11)の解である。

$$\theta = \theta_2 = - \frac{x_\varphi^*}{\xi_\varphi} \quad (3.29)$$

のときには、

$$x_\varphi = x_\varphi^* + \Delta x_\varphi = x_\varphi^* + \theta \xi_\varphi = 0$$

である。そこで $\mathcal{A} - \{\varphi\}$ を新しく \mathcal{A} とし、式 (3.28) の右辺を新しく x_p^* として同様の計算を行なっていけばよい。もちろん t_0^* , Z^* はそれぞれ $t_0^* + \theta$, $Z^* - \theta \sum_{p \in \mathcal{A}} \xi_p$ に変わっている。

$$\theta = \theta_3 = \frac{\sum_{k \in \mathcal{A}} e_{\varphi k} x_k^* + w_{\varphi} - t_0^*}{1 - \sum_{k \in \mathcal{A}} e_{\varphi k} \xi_k} \quad (3.30)$$

のときには

$$\sum_{k \in \mathcal{A}} e_{\varphi k} x_k^* + w_{\varphi} = t_0$$

であるから、 $\mathcal{A} \cup \{\varphi\}$ を新しく \mathcal{A} とし、式 (3.28) の右辺を新しく x_p^* , $t_0^* + \theta$ を t_0^* , $Z^* - \theta \sum_{p \in \mathcal{A}} \xi_p$ を Z^* として同様の計算を行なっていけばよい。

いずれにしても、各ステップで Z は単調に減少していき、しかも下に有界であるから最後には 0 となり、もとの方程式 (3.5) の解にいたる。

最初のステップでは、ゼロフロー時の最短路の経路番号を \mathcal{A} とし、パスフローをすべて 0 とすればよい。すなわち、

$$\mathcal{A}^{(1)} = \{ \varphi \in \mathcal{F} \mid w_{\varphi} = \min_k w_p \}$$

$$x_p^{*(1)} = 0 \quad (p \in \mathcal{F})$$

$$Z^{*(1)} = S$$

$$t_0^{(1)} = \min_p w_p$$

以上のアルゴリズムをまとめると次のようになる。ただし (ν) は第 ν ステップ目であることを示す添字とする。

(1) $\mathcal{A}^{(1)}$, $x_p^{*(1)}$, $Z^{*(1)}$, $t_0^{(1)}$ を決める。

(2) 係数行列 $E^{(\nu)} = (e_{pk})$, $(p, k \in \mathcal{A}^{(\nu)})$ を作成し方程式

$$\sum_{k \in \mathcal{A}} e_{pk} \xi_k^{(\nu)} = 1 \quad (p \in \mathcal{A}^{(\nu)})$$

の解を求める。

(3) $\theta_1^{(\nu)}$ を次式により求める。

$$\theta_1^{(\nu)} = \frac{z^{*(\nu)}}{\sum_{p \in \mathcal{A}^{(\nu)}} \xi_p^{(\nu)}}$$

(4) $\theta_2^{(\nu)}$ を次式により求める。

$$\theta_2^{(\nu)} = \min_{\xi_p^{(\nu)} < 0, p \in \mathcal{A}^{(\nu)}} \frac{x_p^{*(\nu)}}{\xi_p^{(\nu)}}$$

(5) $\theta_3^{(\nu)}$ を次式により求める。

$$\theta_3^{(\nu)} = \min_{\substack{\sum_{k \in \mathcal{A}^{(\nu)}} e_{pk} \xi_k^{(\nu)} < 1 \\ p \in \bar{\mathcal{A}}^{(\nu)}}} \frac{\sum_{k \in \mathcal{A}^{(\nu)}} e_{pk} x_k^{*(\nu)} + w_p - t_0^{*(\nu)}}{1 - \sum_{k \in \mathcal{A}^{(\nu)}} e_{pk} \xi_k^{(\nu)}}$$

(6) $\theta^{(\nu)} = \min(\theta_1^{(\nu)}, \theta_2^{(\nu)}, \theta_3^{(\nu)})$ を決める。

(7) $\theta^{(\nu)} = \theta_1^{(\nu)}$ のとき、解は次式により与えられる。

$$\left. \begin{aligned} x_p &= x_p^{*(\nu)} + \theta^{(\nu)} \xi_p^{(\nu)} & (p \in \mathcal{A}^{(\nu)}) \\ x_p &= 0 & (p \in \bar{\mathcal{A}}^{(\nu)}) \end{aligned} \right\}$$

(8) $\theta^{(\nu)} = \theta_2^{(\nu)}$ のとき

$$\theta_2^{(\nu)} = -\frac{x_\varphi^{*(\nu)}}{\xi_\varphi^{(\nu)}}$$

に対して

$$\left. \begin{aligned} \mathcal{A}^{(\nu+1)} &= \mathcal{A}^{(\nu)} - \{\varphi\} \\ x_p^{*(\nu+1)} &= x_p^{*(\nu)} + \theta^{(\nu)} \xi_p^{(\nu)} & (p \in \mathcal{A}^{(\nu)}) \\ x_p^{*(\nu+1)} &= 0 & (p \in \bar{\mathcal{A}}^{(\nu)}) \end{aligned} \right\}$$

$$t_0^{*(\nu+1)} = t_0^{*(\nu)} + \theta^{(\nu)}$$

$$z^{*(\nu+1)} = z^{*(\nu)} - \theta^{(\nu)} \sum_{p \in \mathcal{A}^{(\nu)}} \xi_p^{(\nu)}$$

として(2)にもどる。

(9) $\theta^{(\nu)} = \theta_3^{(\nu)}$ のとき、

$$\theta_3^{(\nu)} = \frac{\sum_{k \in \mathcal{A}^{(\nu)}} e_{\varphi k} x_k^{*(\nu)} + w_{\varphi} - t_0^{*(\nu)}}{1 - \sum_{k \in \mathcal{A}^{(\nu)}} e_{\varphi k} \xi_k^{(\nu)}}$$

に対して、

$$\mathcal{A}^{(\nu+1)} = \mathcal{A}^{(\nu)} \cup \{ \varphi \}$$

$$\left. \begin{aligned} x_p^{*(\nu+1)} &= x_p^{*(\nu)} + \theta^{(\nu)} \xi_p^{(\nu)} & (p \in \mathcal{A}^{(\nu)}) \\ x_p^{*(\nu+1)} &= 0 & (p \in \mathcal{A}^{(\nu)}) \end{aligned} \right\}$$

$$t_0^{*(\nu+1)} = t_0^{*(\nu)} + \theta^{(\nu)}$$

$$z^{*(\nu+1)} = z^{*(\nu)} - \theta^{(\nu)} \sum_{p \in \mathcal{A}^{(\nu)}} \xi_p^{(\nu)}$$

として(2)にもどる。

このアルゴリズムの主要な計算は、(2)で連立一次方程式の解を求めることであるが、各ステップでそれぞれ直接にこの方程式を解く必要はない。行列 $E = (e_{pk})$ は各ステップで1つずつ行と列を付加あるいは削除したものとなるから、前のステップでの逆行列が求まっておれば当該ステップの逆行列は分割法⁵²⁾により容易に計算することができる。

(i) $\mathcal{A}^{(\nu-1)} = \{ f, g, \dots, h \}$, $\mathcal{A}^{(\nu)} = \{ f, g, \dots, h, \varphi \}$ のときには、

$$E^{(\nu)} = \left(\begin{array}{cccc|c} e_{ff} & e_{fg} & \cdots & e_{fh} & e_{f\varphi} \\ e_{gf} & e_{gg} & \cdots & e_{gh} & e_{g\varphi} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \vdots \\ e_{hf} & e_{hg} & \cdots & e_{hh} & e_{h\varphi} \\ e_{\varphi f} & e_{\varphi g} & \cdots & e_{\varphi h} & e_{\varphi\varphi} \end{array} \right) = \left(\begin{array}{c|c} K & L \\ \hline M & N \end{array} \right)$$

$$Z = N - M K^{-1} L$$

$$X = K^{-1} L$$

$$Y = M K^{-1}$$

とおくと、 $E^{(\nu)-1}$ は、

$$E^{(\nu)-1} = \begin{pmatrix} K^{-1} + X Z^{-1} Y, & -X Z^{-1} \\ -Z^{-1} Y, & Z^{-1} \end{pmatrix}$$

(ii) $\mathcal{A}^{(\nu-1)} = \{ f, g, \dots, h, \varphi \}$ $\mathcal{A}^{(\nu)} = \{ f, g, \dots, h \}$ のときには、

$$E^{(\nu-1)-1} = \begin{pmatrix} e_{ff} & e_{fg} & \dots & e_{fh} & e_{f\varphi} \\ e_{gf} & e_{gg} & \dots & e_{gh} & e_{g\varphi} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ e_{hf} & e_{hg} & \dots & e_{hh} & e_{h\varphi} \\ e_{\varphi f} & e_{\varphi g} & \dots & e_{\varphi h} & e_{\varphi\varphi} \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} K & L \\ M & N \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} P & Q \\ R & S \end{pmatrix}$$

とすると、 $E^{(\nu)-1}$ は次のように表わされる。

$$E^{(\nu)-1} = K^{-1} = P - Q S^{-1} R$$

3.3 経路の一次独立性に関する定義と性質

前節で述べたアルゴリズムが有効であるためには、いくつかの条件を満足しなければならない。それらの条件に関する証明は次節で述べるが、ここではそのための準備として、経路の一次独立性に関する定義を行い、その性質を明らかにする。

定義 7

起終点を同じくするパス $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n$ について、そのパスベクトル $\pi_1, \pi_2, \dots, \pi_n$ が一次独立であるとき、これらのパスは一次独立であるという。

定理 7

有向グラフでは、結合行列 S とパス行列 R の転置との積 $Q = S R^t$ は、その起点と終点に対応する行を除くすべての行がゼロ要素ばかりの行列である。起点に対応する行の要素はすべて 1 であり、終点に対応する行の要素はすべて -1 である。(証明は省略する)

定理 8

m 個のアーキと p 個のノードを有する連結有向グラフにおいて、パス行列の階数は $m - p + 2$ を越えない。

(証明)

パス行列の階数を f とすると

$$f \leq \text{rank } Q - \text{rank } S + m$$

が成り立つ。 Q は起点に対応する行の要素がすべて 1、終点に対応する行の要素がすべて -1 で他の要素はすべて 0 の行列である。よって $\text{rank } Q = 1$ であり、また結合行列 S の階数は $p - 1$ である。よって、

$$f \leq 1 - (p - 1) + m = m - p + 2 \quad (3.31)$$

いま、起終点を同じくするパス u_1, u_2, \dots, u_n は一次独立であるとし、これらとは一次独立でない同じ起終点をもつ任意のパス μ_k のパスベクトル r_k を、

$$r_k = C_1 r_1 + C_2 r_2 + \dots + C_n r_n \quad (3.32)$$

と表わすとき、次の定理がなりたつ。

定理 9

式 (3.32) の係数 C_1, C_2, \dots, C_n について

$$C_1 + C_2 + \dots + C_n = 1 \quad (3.33)$$

が成り立つ。

(証明)

式 (3.32) の両辺の転置をとり、これに結合行列 S を乗じると、

$$\begin{aligned} S r_k^t &= S (C_1 r_1^t + C_2 r_2^t + \dots + C_n r_n^t) \\ &= C_1 S r_1^t + C_2 S r_2^t + \dots + C_n S r_n^t \end{aligned}$$

となる。定理 7 より、結合行列とパスベクトルの転置との積は、起点に対応する行には 1、終点に対応する行には -1 という要素をもっており、他はすべて 0 である。よって上式の起点および終点に対応する行に着目すると

$$1 = C_1 + C_2 + \dots + C_n$$

となっている。

定義 8

起終点を同じくするルート $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n$ について、そのルートベクトル r_1, r_2, \dots, r_n が一次独立であるとき、これらのルートは一次独立であるという。

定理 10

無向グラフでは、結合行列 S とルート行列 R の転置との積 $Q = S R^t$ について、 $Q = (q_{ik})$ とすると次式が成り立つ。

$$q_{ik} = \begin{cases} 1 ; \text{ルート } k \text{ がノード } i \text{ を起終点とするとき、} \\ 2 ; \text{ルート } k \text{ がノード } i \text{ を通過するとき、} \\ 0 ; \text{その他の場合。} \end{cases}$$

(証明は省略する。)

定理 11

m 個のリンクを有する連結無向グラフにおいて、ルート行列の階数は m を越えない。

(証明)

ノードの数を p , ルート行列 R の階数を f とすると、

$$f \leq \text{rank } Q = \text{rank } S + m$$

が成り立つ。行列 Q の起点および終点に対応する行の要素はすべて 1 であるから、 $\text{rank } Q$ は $p-1$ を越えない。また結合行列 S の階数は $p-1$ 以上である。よって、

$$f \leq (p-1) - (p-1) + m = m \quad (3.34)$$

いま起終点を同じくするルート $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n$ は一次独立であるとし、これらとは一次独立でない同じ起終点をもつ任意のルート μ_k のルートベクトルを、

$$r_k = C_1 r_1 + C_2 r_2 + \dots + C_n r_n \quad (3.35)$$

と表わすとき、次の定理が成り立つ。

定理 12

式 (3.35) の係数 C_1, C_2, \dots, C_n について、

$$C_1 + C_2 + \dots + C_n = 1 \quad (3.36)$$

が成り立つ。

(証明は定理 9 の場合と全く同様なので省略する。)

定理 9、定理 12 により、有向グラフにおいても、また無向グラフにおいても同様の帰結が得られていることに注意を払う必要がある。

3.4 若干の理論的補遺

ここでは3.2で補題として挙げられているいくつかの基本的事項について、前節で述べた経路の一次独立性に関する知識を用いて証明を行う。

補題3

$\mathcal{A}^{(\nu)} = \{ f, g, \dots, h \}$ とするとき、パス $\mu_f, \mu_g, \dots, \mu_h$ は一次独立である。

(証明)

一般的な段階では $\varphi \in \mathcal{A}^{(\nu)}$ が $\sum_{k \in \mathcal{A}^{(\nu)}} e_{\varphi k} \xi_k^{(\nu)} < 1$ であり、

$$\theta_3^{(\nu)} = \frac{\sum_{k \in \mathcal{A}^{(\nu)}} e_{\varphi k} x_k^{*(\nu)} + w_{\varphi} - t_0^{*(\nu)}}{1 - \sum_{k \in \mathcal{A}^{(\nu)}} e_{\varphi k} \xi_k^{(\nu)}}$$

となるとき、 $\mathcal{A}^{(\nu+1)} = \mathcal{A}^{(\nu)} \cup \{ \varphi \}$ とするのであるから、 μ_{φ} が $\mu_f, \mu_g, \dots, \mu_h$ とは一次独立であることを示せばよい。

いま、

$$\eta_j^{(\nu)} = \sum_{p \in \mathcal{A}^{(\nu)}} a_j r_{pj} \xi_p^{(\nu)} \quad (j = 1, 2, \dots, m) \quad (3.37)$$

とくと、

$$\begin{aligned} \sum_j r_{kj} \eta_j^{(\nu)} &= \sum_j r_{kj} \sum_{p \in \mathcal{A}^{(\nu)}} a_j r_{pj} \xi_p^{(\nu)} = \sum_{p \in \mathcal{A}^{(\nu)}} \xi_p^{(\nu)} \sum_j a_j r_{kj} r_{pj} \\ &= \sum_{p \in \mathcal{A}^{(\nu)}} e_{kp} \xi_p^{(\nu)} \end{aligned} \quad (3.38)$$

となる。ここで

$$\sum_j r_{kj} \eta_j^{(\nu)} = 1 \quad (k \in \mathcal{A}^{(\nu)}) \quad (3.39)$$

であることはいうまでもない。

いまパス μ_{φ} が $\mu_f, \mu_g, \dots, \mu_h$ とは一次独立ではないとすると、 μ_{φ} のパスベクトル r_{φ} は、

$$\tau_\varphi = \sum_{p \in \mathcal{A}}^{(\nu)} C_p \tau_p = C_f \tau_f + C_g \tau_g + \cdots + C_h \tau_h \quad (3.40)$$

と表わされ、しかも定理9より、

$$C_f + C_g + \cdots + C_h = 1 \quad (3.41)$$

である。ここで

$$\eta^{(\nu)} = (\eta_1^{(\nu)}, \eta_2^{(\nu)}, \cdots, \eta_m^{(\nu)})$$

とおき、 $\eta^{(\nu)}$ を式 (3.40) の両辺に乗じると、

$$\eta^{(\nu)} \tau_\varphi = C_f \eta^{(\nu)} \tau_f + C_g \eta^{(\nu)} \tau_g + \cdots + C_h \eta^{(\nu)} \tau_h \quad (3.42)$$

となる。式 (3.38), (3.39) より

$$\begin{aligned} \eta^{(\nu)} \tau_\varphi &= \sum_{p \in \mathcal{A}}^{(\nu)} e_{\varphi p} \xi_p^{(\nu)} \\ \eta^{(\nu)} \tau_f &= \eta^{(\nu)} \tau_g = \cdots = \eta^{(\nu)} \tau_h = 1 \end{aligned}$$

である。よって式 (3.42) より

$$\sum_{k \in \mathcal{A}}^{(\nu)} e_{\varphi k} \xi_k^{(\nu)} = C_f + C_g + \cdots + C_h \quad (3.43)$$

をうる。式 (3.41) より上式の右辺は1に等しい。よって

$$\sum_{k \in \mathcal{A}}^{(\nu)} e_{\varphi k} \xi_k^{(\nu)} = 1 \quad (3.44)$$

となる。これは経路 μ_φ が、

$$\sum_{k \in \mathcal{A}}^{(\nu)} e_{\varphi k} \xi_k^{(\nu)} < 1 \quad (3.45)$$

であることに反する。よって μ_φ は $\mu_f, \mu_g, \cdots, \mu_h$ とは一次独立である。これより、任意のステップ ν において、パス $\mu_f, \mu_g, \cdots, \mu_h$ は一次独立である。

補題4

行列 $E^{(\nu)} = (e_{pk})$ ($p, k \in \mathcal{A}^{(\nu)}$) は正値行列である。

(証明)

$\mathcal{A}^{(\nu)} = \{f, g, \cdots, h\}$ とし、経路 $\mu_f, \mu_g, \cdots, \mu_h$ に関するパス行列を $R^{(\nu)}$ とすると、

$$E^{(\nu)} = R^{(\nu)} A (R^{(\nu)})^t \quad (3.46)$$

が成り立つ。ここに、

$$R^{(\nu)} = \begin{pmatrix} r_{f1}, r_{f2}, \dots, r_{fm} \\ r_{g1}, r_{g2}, \dots, r_{gm} \\ \dots \\ r_{h1}, r_{h2}, \dots, r_{hm} \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} a_1 & & \\ & a_2 & \\ & & \ddots \\ & & & a_m \end{pmatrix}$$

である。ここで、任意のベクトル $x^t = (x_1, x_2, \dots, x_m) \neq 0$ に対して、

$$x^t A x = \sum_j a_j x_j^2 > 0$$

であるから、 $x^t A x$ は正定値である。

また、任意のベクトル $y \neq 0$ に対して、

$$y^t E^{(\nu)} y = y^t R^{(\nu)} A (R^{(\nu)})^t y = (R^{(\nu)})^t y^t A (R^{(\nu)})^t y$$

であるから、

$$(R^{(\nu)})^t y = x \quad (3.47)$$

とおくと、ベクトル u_f, u_g, \dots, u_h が一次独立であることより、 $y \neq 0$ に対して $x \neq 0$ となり、

$$y^t E^{(\nu)} y = x^t A x > 0 \quad (3.48)$$

が成り立つ。よって行列 $E^{(\nu)}$ は正値行列である。

補題5

連立一次方程式

$$\sum_{k \in \mathcal{A}^{(\nu)}} e_{pk} \xi_k^{(\nu)} = 1 \quad (p \in \mathcal{A}^{(\nu)})$$

の解について、 $\sum_{k \in \mathcal{A}^{(\nu)}} \xi_k^{(\nu)} > 0$ が成り立つ。

(証明)

$$\sum_{p \in \mathcal{A}^{(\nu)}} \xi_p^{(\nu)} = \sum_{p \in \mathcal{A}^{(\nu)}} \xi_p^{(\nu)} \sum_{k \in \mathcal{A}^{(\nu)}} e_{pk} \xi_k^{(\nu)} = \sum_{p \in \mathcal{A}^{(\nu)}} \sum_{k \in \mathcal{A}^{(\nu)}} \xi_p^{(\nu)} \xi_k^{(\nu)} e_{pk} \quad (3.49)$$

となる。行列 $E^{(\nu)} = (e_{pk})$ は正値行列であるから、連立一次方程式 $\sum_{k \in \mathcal{A}^{(\nu)}} e_{pk} \xi_k^{(\nu)} = 1$ は、

$$\xi_k^{(\nu)} = 0 \quad (k \in \mathcal{A}^{(\nu)})$$

以外の解をもつ。この解に対して、 $E^{(\nu)} = (e_{pk})$ は正値行列であるから、

$$\sum_{p \in \mathcal{A}^{(\nu)}} \xi_p^{(\nu)} = \sum_{p \in \mathcal{A}^{(\nu)}} \sum_{k \in \mathcal{A}^{(\nu)}} \xi_p^{(\nu)} \xi_k^{(\nu)} e_{pk} > 0 \quad (3.50)$$

となる。

補題6

任意のステップ ν において

$$\theta_2^{(\nu)} = \min_{\xi_p^{(\nu)} < 0, p \in \mathcal{A}^{(\nu)}} - \frac{x_p^{*(\nu)}}{\xi_p^{(\nu)}} > 0$$

が成り立つ。

(証明)

任意のステップ ν において、

$$x_p^{*(\nu)} \geq 0 \quad (p \in \mathcal{P})$$

であり、特に等式の成り立つのは、 $p \in \bar{\mathcal{A}}^{(\nu)}$ であるかまたは $\varphi \in \bar{\mathcal{A}}^{(\nu-1)}$ かつ $\varphi \in \mathcal{A}^{(\nu)}$ となる $x_{\varphi}^{*(\nu)}$ の場合であるから、

$$\xi_{\varphi}^{(\nu)} > 0$$

であることを示せばよい。

いま $E^{(\nu)}$ を次のように分解し、

$$E^{(\nu)} = \begin{pmatrix} & & & \vdots & e_{f\varphi} \\ & & & \vdots & e_{g\varphi} \\ & & & \vdots & \vdots \\ & & & \vdots & e_{h\varphi} \\ e_{\varphi f} & e_{\varphi g} & \cdots & e_{\varphi h} & e_{\varphi\varphi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} K & L \\ M & N \end{pmatrix} \quad (3.51)$$

$$\begin{aligned}
Z &= N - M K^{-1} L \\
X &= K^{-1} L \\
Y &= M K^{-1}
\end{aligned}
\tag{3.52}$$

とおく。 $E^{(\nu)}$ は正値行列であることより

$$|K| > 0, \quad \begin{vmatrix} K, L \\ M, N \end{vmatrix} > 0$$

行列式の展開公式によって、

$$\begin{vmatrix} K, L \\ M, N \end{vmatrix} = |K| |N - M K^{-1} L|$$

となるから、

$$N - M K^{-1} L > 0
\tag{3.53}$$

である。いま、

$$\begin{aligned}
i &= (1, 1, \dots, 1)^t \\
\xi^{(\nu-1)} &= (\xi_f^{(\nu-1)}, \xi_g^{(\nu-1)}, \dots, \xi_h^{(\nu-1)})^t
\end{aligned}$$

とすると、

$$K \xi^{(\nu-1)} = i$$

より、

$$\xi^{(\nu-1)} = K^{-1} i$$

であり、

$$\sum_{k \in A} \xi_k^{(\nu-1)} e_{\varphi k} = M \xi^{(\nu-1)} = M K^{-1} i < 1
\tag{3.54}$$

となっている。ところが、

$$\begin{pmatrix} K, L \\ M, L \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} K^{-1} + X Z^{-1} Y & -X Z^{-1} \\ -Z^{-1} Y & Z^{-1} \end{pmatrix}$$

より、

$$\xi_{\varphi}^{(\nu)} = -Z^{-1} Y i + Z^{-1} = Z^{-1} (1 - M K^{-1} i)
\tag{3.55}$$

となる。ここで、

$$Z^{-1} = (N - M K^{-1} L)^{-1} > 0$$

であるから、

$$\xi_{\varphi}^{(\nu)} > 0 \quad (3.56)$$

をうる。

補題 7

任意のステップ ν において

$$\theta_3^{(\nu)} = \min_{\substack{\sum_{k \in \mathcal{A}^{(\nu)}} e_{pk} \xi_k^{(\nu)} < 1 \\ p \in \bar{\mathcal{A}}^{(\nu)}}} \frac{\sum_{k \in \mathcal{A}^{(\nu)}} e_{pk} x_k^{*(\nu)} + w_p - t_0^{*(\nu)}}{1 - \sum_{k \in \mathcal{A}^{(\nu)}} e_{pk} \xi_k^{(\nu)}} > 0$$

が成り立つ。

(証明)

任意のステップ ν において

$$\sum_{k \in \mathcal{A}^{(\nu)}} e_{pk} x_k^{*(\nu)} + w_p - t_0^{*(\nu)} \geq 0$$

である。等式の成り立つのは、 $p \in \mathcal{A}^{(\nu)}$ の場合、経路 μ_{φ} が μ_p ($p \in \mathcal{A}^{(\nu)}$) に関して一次独立でないとき、および経路 μ_{φ} が $\varphi \in \mathcal{A}^{(\nu-1)}$ かつ $\varphi \in \bar{\mathcal{A}}^{(\nu)}$ となっているときである。

経路 μ_{φ} が μ_p ($p \in \mathcal{A}^{(\nu)}$) に関して一次独立でないときには、

$$r_{\varphi_j} = \sum_{k \in \mathcal{A}^{(\nu)}} C_k r_{kj} \quad (j=1, 2, \dots, m)$$

と表わされ、しかも定理 9 より

$$\sum_{k \in \mathcal{A}^{(\nu)}} C_k = 1$$

である。よって

$$\begin{aligned} \sum_{k \in \mathcal{A}^{(\nu)}} e_{pk} x_k^{*(\nu)} + w_p - t_0^{*(\nu)} &= \sum_{k \in \mathcal{A}^{(\nu)}} x_k^{*(\nu)} \sum_j a_j r_{\varphi_j} r_{kj} + \sum_j r_{\varphi_j} b_j - t_0^{*(\nu)} \\ &= \sum_{k \in \mathcal{A}^{(\nu)}} x_k^{*(\nu)} \sum_j a_j r_{kj} \sum_{p \in \mathcal{A}^{(\nu)}} C_p r_{pj} + \sum_j b_j \sum_{p \in \mathcal{A}^{(\nu)}} C_p r_{pj} - t_0^{*(\nu)} \\ &= \sum_{k \in \mathcal{A}^{(\nu)}} x_k^{*(\nu)} \sum_{p \in \mathcal{A}^{(\nu)}} C_p e_{pk} + \sum_{p \in \mathcal{A}^{(\nu)}} C_p w_p - t_0^{*(\nu)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{p \in \mathcal{A}^{(\nu)}} C_p \left(\sum_{k \in \mathcal{A}^{(\nu)}} e_{kp} x_k^{*(\nu)} + w_p \right) - t_0^{*(\nu)} \\
&= t_0^{*(\nu)} \sum_{p \in \mathcal{A}^{(\nu)}} C_p - t_0^{*(\nu)} = 0
\end{aligned} \tag{3.57}$$

であり、また同様に、

$$\sum_{k \in \mathcal{A}^{(\nu)}} e_{\varphi k} \xi_k^{(\nu)} = \sum_{p \in \mathcal{A}^{(\nu)}} C_p \sum_{k \in \mathcal{A}^{(\nu)}} e_{pk} \xi_k^{(\nu)} = \sum_{p \in \mathcal{A}^{(\nu)}} C_p = 1 \tag{3.58}$$

である。したがって経路 μ_φ が $\varphi \in \mathcal{A}^{(\nu-1)}$ かつ $\varphi \in \mathcal{A}^{(\nu)}$ のとき、

$$\sum_{k \in \mathcal{A}^{(\nu)}} e_{\varphi k} \xi_k^{(\nu)} \geq 1$$

であることを示せばよい。いま、行列 $E^{(\nu-1)}$ を分解して、

$$E^{(\nu-1)} = \begin{pmatrix} & & & e_{f\varphi} \\ & & & e_{g\varphi} \\ & & & \vdots \\ & & & e_{h\varphi} \\ E^{(\nu)} & & & \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ e_{\varphi f} & e_{\varphi g} & \cdots & e_{\varphi h} & e_{\varphi\varphi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} K:L \\ \cdots \\ M:N \end{pmatrix} \tag{3.59}$$

とする。ここで、 z, X, Y を次のように置く。

$$\begin{aligned}
z &= N - MK^{-1}L \\
X &= K^{-1}L \\
Y &= MK^{-1}
\end{aligned} \tag{3.60}$$

経路 μ_φ が、 $\varphi \in \mathcal{A}^{(\nu-1)}$ かつ $\varphi \in \mathcal{A}^{(\nu)}$ であることより、

$$\begin{aligned}
\xi_\varphi^{(\nu-1)} &= -z^{-1}Y\dot{z} + z^{-1} = -z^{-1}MK^{-1}\dot{z} + z^{-1} \\
&= z^{-1}(1 - MK^{-1}\dot{z}) < 0
\end{aligned} \tag{3.61}$$

となっており、 $z^{-1} > 0$ であるから、

$$1 - MK^{-1}\dot{z} < 0 \tag{3.62}$$

である。

ところが、

$$K \xi^{(\nu)} = i$$

より

$$\xi^{(\nu)} = K^{-1} i$$

であって、したがって、

$$\sum_{k \in \mathcal{A}^{(\nu)}} e_{pk} \xi_k^{(\nu)} = M K^{-1} i > 1 \quad (3.63)$$

となる。よって

$$\sum_{k \in \mathcal{A}^{(\nu)}} e_{pk} \xi_k^{(\nu)} > 1 \quad (3.64)$$

が成り立つ。

以上のことより、任意のステップ ν において

$$\theta_3^{(\nu)} = \min_{\substack{\sum_{k \in \mathcal{A}^{(\nu)}} e_{pk} \xi_k^{(\nu)} < 1 \\ p \in \mathcal{A}^{(\nu)}}} \frac{\sum_{k \in \mathcal{A}^{(\nu)}} e_{pk} x_k^{*(\nu)} + w_p - t_0^{*(\nu)}}{1 - \sum_{k \in \mathcal{A}^{(\nu)}} e_{pk} \xi_k^{(\nu)}} > 0 \quad (3.65)$$

が成り立つ。

3.5 配分計算の手順と計算例

これまでに、どのように経路を探索し、目標関数を最小化していくかという方針が得られている。制約領域上の任意の1点より出発し、この方法によって順次降下を行えば、次第に目標関数の最小点に近づくであろう。もちろんパスフローは一意的ではないから、最初の出発点のとり方、降下していく際のゾーンペア選択の順序によって解は異なるかも知れない。しかし区間交通量で見たときには、次第に収束していくことが期待でき、しかも収束した値は等時間原則にしたがう。

最初の出発点のとり方によって収束性が悪くなることもあるので、これはごく普通に考えて妥当でしかも容易に求まる点であることが必要である。そこでゼロフロー時の最短路に全OD交通量を割り当てた点を初期値としよう。また、降下していく際のゾーンペアの順序としては、飯田によって示唆されたように、長トリップほど途中経路に関する情報量が少く、したがって配分

計算においては先決さるべきであるという考え方から、長トリップから順に降下を行っていくことにする。

配分計算の手順をまとめると次のようになる。

- (1) ゼロフロー時の所要時間を用いて、すべてのゾーン間の最短経路探索を行う。
- (2) 各起終点交通量をゼロフロー時の最短経路に予備配分する。これが初期値となる。
- (3) 配分計算を行う際のゾーンペアの順序を決める。すなわちトリップ長の長い順にゾーンペアをならべる。
- (4) 順序にしたがって1ゾーンペアを選び、起終点間の最短経路探索を行う。求めた経路がすでに求められているもの以外なら記憶される。
- (5) 着目するゾーンペア以外のパスフローをすべて固定し、このゾーンペアの記憶されている経路を用いて配分計算を行う。
- (6) 順序にしたがって再配分計算をすべてのゾーンペアについて行う。
- (7) (4)～(6)の再配分計算を、各区間交通量が収束するまで続ける。

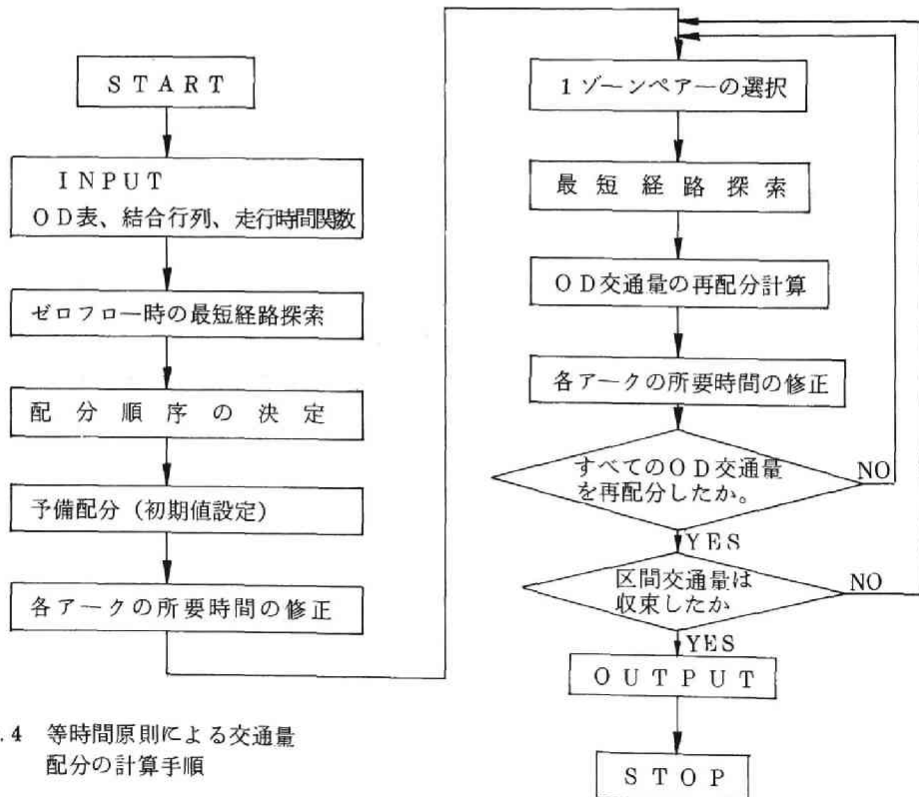


図 3.4 等時間原則による交通量配分の計算手順

いま図 3.5 に示す道路網で等時間原則による交通量配分の計算をしてみる。図は近畿地方の幹線道路網をモデル化したものである。OD 交通量は表 3.1 に、走行時間関数の定数は表 3.2 に示している。

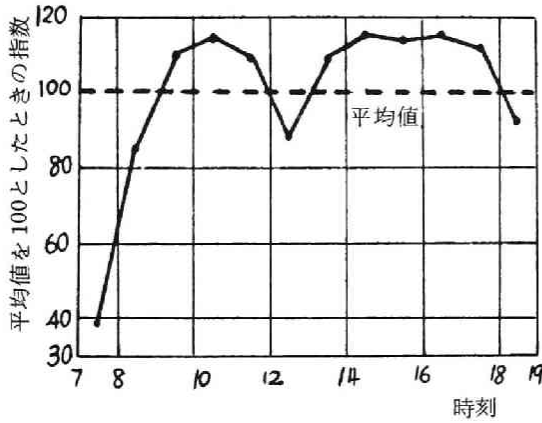


図 3.6 交通量の時間的変動の例

本計算例では定数 a_j, b_j の値を次のようにして算出した。OD 交通量は 1 日交通量として与えられるがこれは 1 日中同じような状態で流れるのではなく、常に時間変動をとまっている。最も普通に見られるパターンは、午前と午後にピークがあり夜間に減少するものである⁵³⁾。しかし、このような非定常な状態を考慮に入れることはできないので、1 日交通量が特定の 12 時間に定常的に流れると仮定する。走行時間関数は図 3.7 の破線に示すようなものとなるが、これを 2 点

$P_1(0, \frac{l}{u_1})$ 、 $P_2(X_2, \frac{l}{u_2})$ を通る直線で近似している。すなわち

$$\begin{aligned} T_j &= a_j X_j + b_j \\ &= l_j (\alpha_j X_j + \beta_j) \end{aligned}$$

ここに、

T_j ; リンク j の所要時間

X_j ; リンク j の交通量

l_j ; リンク j の区間長

$a_j, b_j, \alpha_j, \beta_j$; 定数値

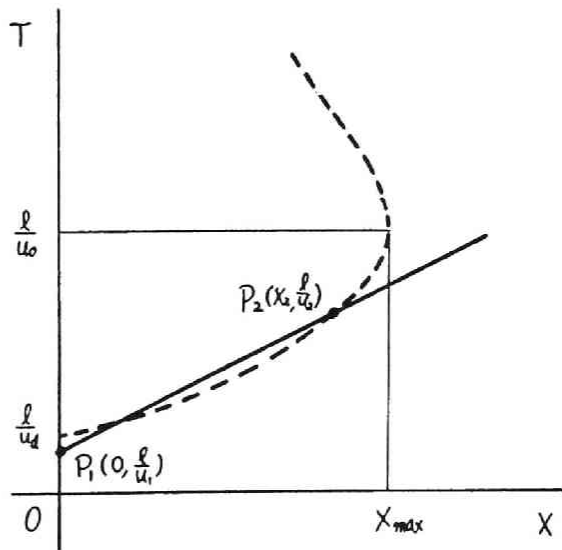


図 3.7 走行時間関数の直線近似

P_1 P_2 としては次のような値を用いる。

		2 車線道路	4 車線道路	6 車線道路
P_1	u_1	60 KM/H	80 KM/H	80 KM/H
P_2	X_2	1200 V.P.H	4800 V.P.H	7200 V.P.H
	u_2	30 KM/H	40 KM/H	40 KM/H

表 3.3 P_1 , P_2 の 値

これより α , β の値を求めると次のようになる。

	2 車線道路	4 車線道路	6 車線道路
α (分/台. Km)	0.0000694444	0.0000130208	0.0000086805
β (分/Km)	1.0	0.75	0.75

表 3.4 α , β の 値

本計算例では 10 回の繰り返し修正計算を行った。計算の各段階における区間交通量の値は表 3.5 に示している。10 回の繰り返しによって得られたパスフローの値は表 3.6 に示すようになる。各区間の配分交通量、所要時間を図によって示すと図 3.8 のようになり、またこの場合の等時間のパターンは図 3.9 に示されている。

本計算は京都大学大型計算機センターの F A C O M 230 — 60 によるものであり、繰り返し 5 回までの計算時間 (CPU 使用時間は 11.637 秒、繰り返し 10 回までの計算時間は 25.788 秒であった。

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	ノード
-	218109	53940	37095	14188	7763	1393	6248	3000	480	1
		14134	2011	1111	1042	459	1445	549	425	2
			9310	396	27169	478	854	1152	45	3
			-	2354	602	123	284	2403	32	4
					271	134	399	8415	35	5
					-	2559	1245	1925	12	6
							66648	2958	11	7
							-	26822	29	8
									9	9
										10

表 3.1 配分対象 O D 交通量 (台)

リンク j	車線数	l_j (Km)	a_j (分/台)	b_j (分)
1	6	26.7	0.0002317708	20.025
2	4	28.5	0.0003710936	21.375
3	4	28.9	0.0003763020	21.675
4	4	48.0	0.0006249998	36.000
5	2	66.2	0.0045972222	66.200
6	2	64.4	0.0044722222	64.400
7	4	25.3	0.0003294270	18.975
8	2	39.6	0.0027499998	39.600
9	2	106.4	0.0073888888	106.400
10	2	99.5	0.0069097222	99.500
11	2	109.9	0.0076319444	109.900
12	2	119.3	0.0082847222	119.300
13	4	30.7	0.0003997394	23.025
14	4	64.1	0.0008346354	48.075
15	2	375.9	0.0261041666	375.900
16	2	49.2	0.0034166666	389.200
17	2	71.5	0.0049652776	361.500

注) リンク 16,17 の b_j の値にはそれぞれコスト + 340(分), + 290(分)が含まれている。

表 3.2 走行時間関数の定数

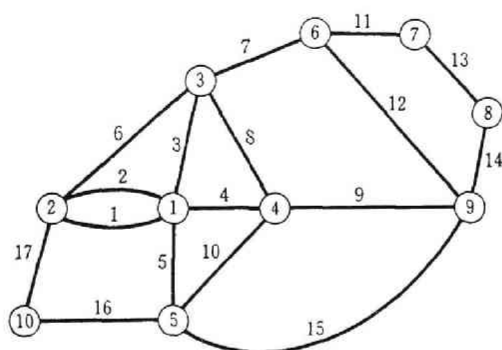


図 3.5 配分対象道路網図

区間交通量 リンク番号	$X^{(0)}$	$X^{(1)}$	$X^{(2)}$	$X^{(3)}$	$X^{(4)}$	$X^{(5)}$
1	239478	140638	144020	144053	144053	144053
2	0	89827	86363	86332	86332	86332
3	87721	79398	79663	79658	79653	79653
4	42696	41608	41259	41267	41272	41272
5	16498	16099	16099	16099	16099	16099
6	0	9011	9094	9092	9091	9091
7	49584	50272	50621	50613	50608	50608
8	10035	10035	10035	10035	10035	10035
9	14660	13853	13436	13435	13439	13439
10	10769	11050	10981	10972	10972	10971
11	15377	11754	12122	12129	12126	12126
12	3077	7388	7368	7354	7351	7351
13	79826	76203	76571	76578	76575	76575
14	30064	33686	33318	33311	33314	33314
15	0	117	186	195	195	196
16	35	35	35	35	35	35
17	1043	1043	1043	1043	1043	1043

* $X^{(0)}$ は予備配分フロー

表 3.5 繰り返し 5 回までの各段階での区間交通量 (台)

表 3.6 10 回の繰り返しによるルートフローと所要時間

OD^i	O	D	ルート k	π_k^i	x_k^i (台)	t_k^i (分)
2 0	3	6	1	000000100000000000	27169.00	35.65
1	1	2	1	100000000000000000	131777.54	53.41
1	1	2	2	010000000000000000	86331.47	53.41
2	1	3	1	001000000000000000	53940.00	51.65
4 0	7	8	1	000000000001000000	66648.00	53.64
3	1	4	1	000100000000000000	37095.00	61.80
1 8	3	4	1	000000010000000000	9310.00	67.20
5	1	6	1	001000100000000000	7763.00	87.30
1 0	2	3	1	101000000000000000	5224.93	105.06
1 0	2	3	2	000001000000000000	8909.07	105.06
4 3	8	9	1	000000000000001000	26822.00	75.88
1 1	2	4	1	100100000000000000	2010.47	115.21
1 1	2	4	2	010100000000000000	0.53	115.21
2 6	4	6	1	000000110000000000	602.00	102.84
1 3	2	6	1	101000100000000000	1042.00	140.71
4	1	5	1	000010000000000000	14187.00	140.21
4 1	7	9	1	000000000000011000	2958.00	129.52
1 2	2	5	1	100010000000000000	1111.00	193.62
1 9	3	5	1	001010000000000000	396.00	191.86
2 5	4	5	1	000000000100000000	2354.00	175.31
2 9	4	9	1	000000001000000000	2403.00	205.70
3 1	5	6	1	001010100000000000	271.00	227.51
3 6	6	7	1	000000000010000000	2559.00	202.45
3 8	6	9	1	000000000001000000	1925.00	180.21
2 1	3	7	1	000000100010000000	478.00	238.10
3 7	6	8	1	000000000001010000	221.25	256.09
3 7	6	8	2	000000000000101000	1023.75	256.09
2 3	3	9	1	000000100001000000	1152.00	215.85
8	1	9	1	000100001000000000	624.09	267.50

OD i	O	D	ルート k	r_k^i	x_k^i (台)	t_k^i (分)
8	1	9	2	00100010000100000	2375.91	267.50
6	1	7	1	00100010001000000	1393.00	289.75
22	3	8	1	00000010001010000	135.29	291.73
22	3	8	2	00000010000101000	718.71	291.73
28	4	8	1	00000000100001000	284.00	281.59
16	2	9	1	10010000100000000	491.52	320.91
16	2	9	2	00000110000100000	57.48	320.91
27	4	7	1	00000011001000000	123.00	305.29
14	2	7	1	10100010001000000	336.26	343.16
14	2	7	2	00000110001000000	122.74	343.16
7	1	8	1	00100010001010000	5266.78	343.38
7	1	8	2	00010000100001000	981.22	343.38
15	2	8	1	10100010001010000	1343.72	396.79
15	2	8	2	10100010000101000	98.18	396.79
15	2	8	3	00000110001010000	2.63	396.79
15	2	8	4	01100010000101000	0.47	396.79
34	5	9	1	00000000110000000	8218.94	381.02
34	5	9	2	00000000000000100	196.06	381.02
32	5	7	1	00101010001000000	134.00	429.96
33	5	8	1	00101010001010000	0.00	483.59
33	5	8	2	00000000110001000	399.00	456.90
17	2	10	1	00000000000000001	425.00	366.68
9	1	10	1	10000000000000001	480.00	420.09
35	5	10	1	00000000000000010	35.00	389.32
24	3	10	1	10100000000000001	45.00	471.74
30	4	10	1	10010000000000001	32.00	481.89
39	6	10	1	10100010000000001	12.00	507.39
45	9	10	1	10010000100000001	9.00	687.59
45	9	10	2	10100010000100001	0.00	687.59
42	7	10	1	10100010001000001	11.00	709.84
44	8	10	1	10100010001010001	0.00	763.47
44	8	10	2	10010000100001001	29.00	763.47

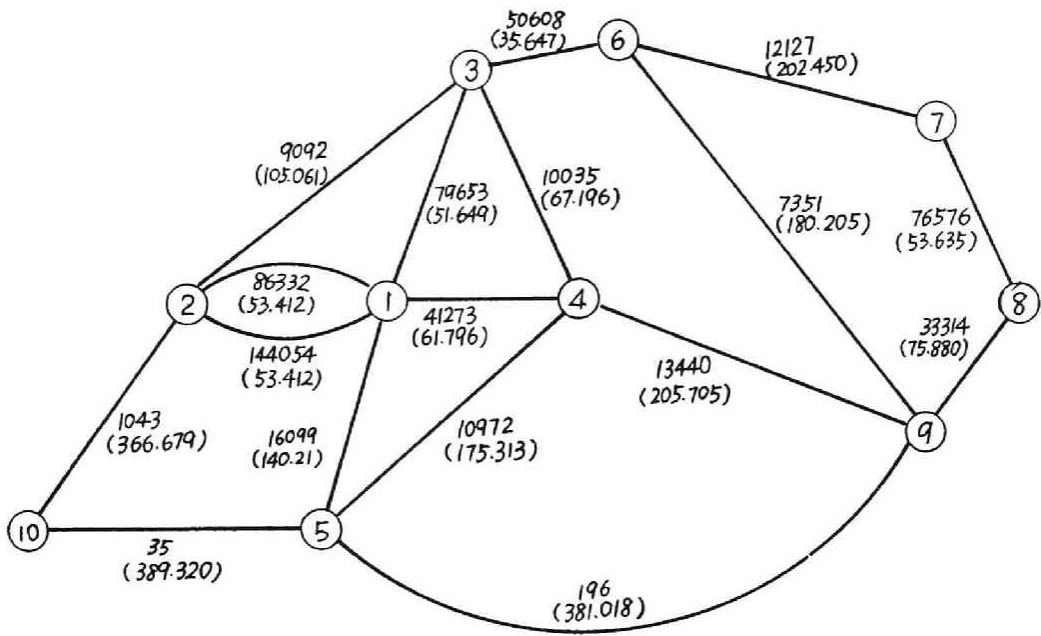


図 3.8 各リンクの配分交通量（台）と所要時間（下段、分）

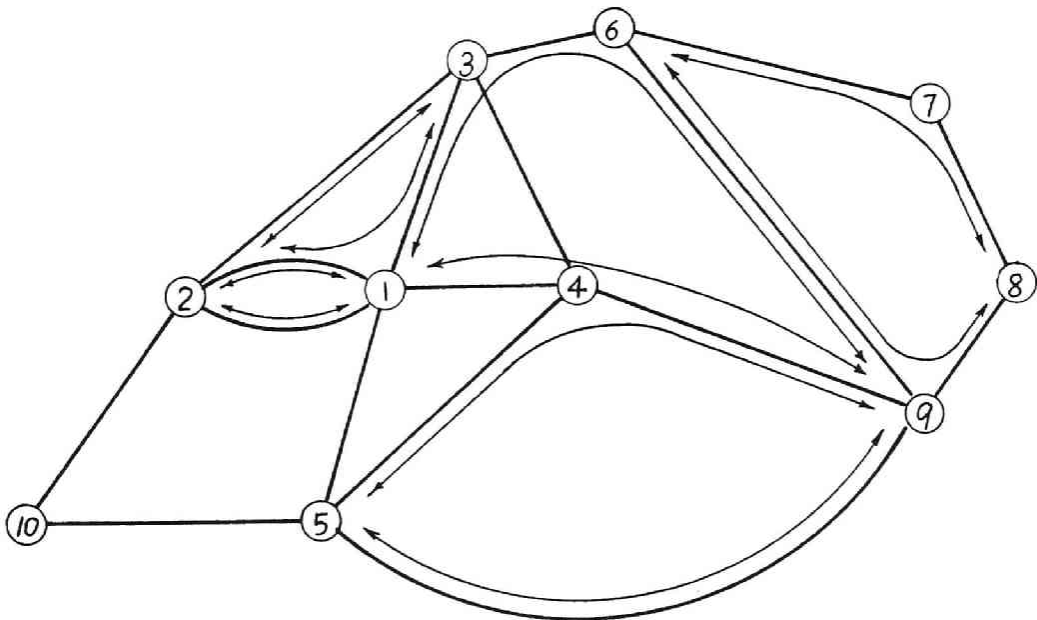


図 3.9 等時間経路のパターン

第4章 非線形走行時間関数の場合の等時間原則 による交通量配分計算法

4.1 走行時間関数の逐次線形近似による解法

これまではある道路区間を走行するのに要する所要時間と交通量の関係を1次式で表わして論を進めてきた。しかし実際には交通量が容量に近づくとき走行所要時間は急激に増大してくるので、仮定された線形式からの乖離が大きくなっていく。しかも大部分の道路で交通が容量近くまで流れているのが現状であるから、この乖離は無視しえないものとなる。

走行時間関数を線形に仮定したときの他の欠点としては、容量制約を設定しにくいことがある。線形走行時間関数のもとでも、道路区間を流れる交通量がある一定値以上にならないようにすることは技術的には可能であるが、プログラミングが非常に複雑になり、計算にも時間を浪費する。しかし容量制約を設けなければ、計算された交通量が実際の交通容量をはるかに越える可能性もあり、交通量配分の意義が薄れてしまう。

厳密に交通量がある一定値を越えないようにするには、交通量が容量に近づくとき、所要時間が無限に大きくなるように、走行時間関数を漸近線をもつ形で仮定すればよく、たとえばそのようなものとして

$$T = a - b \log(c - X)$$

$$T = a + \frac{b}{c - X}$$

T ; 走行所要時間 X ; 交通量

C ; 交通容量 a, b, c ; 正の常数

などがある。

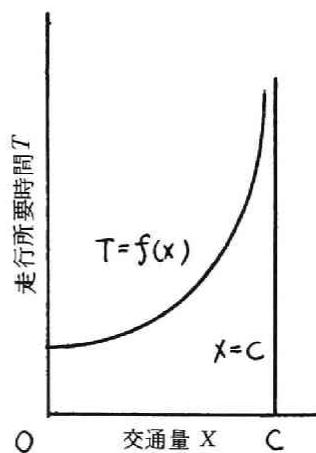


図4・1 漸近線をもつ走行時間関数

あるいは容量といってもはっきりと定まった値をもつものではないから、容量近くで関数の勾配が十分大きくなるようにすればよいという考え方もある。この場合容量に近づいた区間を含む経路の所要時間が極端に大きくなって、運転者がそのような経路を選択することが明らかに不利益となるからである。このような関数は多数存在し、最も簡単なものとしては、

$$T = ae^{bX}$$

$$T = a_1 X^n + a_2 X^{n-1} + \dots + a_n X + b$$

T ; 走行所要時間 X ; 交通量

$a, b, n, a_1, a_2, \dots, a_n$; 正の定数
などが考えられる。

いずれにせよ本章では実行可能解が存在する, すなわち容量の定められた道路網においても, 与えられたOD交通量を道路網に流しうるとして論を進める。また漸近線をもつ場合でももたない場合でもその取り扱いに変わりはないので, 一般的な非線形単調増加関数の場合における計算法を示すことにする。

前章で走行時間関数を線形に仮定したときの計算法を示したが, 走行時間関数が非線形のときにはこの手法を応用することができる。すなわち非線形の

走行時間関数を何らかの形で線形近似し, 逐次実際の関数上に収束させていけばよい。

いまある計算のステップで求まっている区間交通量を X_0 としよう。このとき走行時間関数 $T = f(X)$ を X_0 における接線で近似する。すなわち,

$$T \cong f(X_0) + (X - X_0) \left(\frac{df(X)}{dX} \right)_{X=X_0} = a^* X + b^* \quad (4.1)$$

ここに,

$$a^* = \left(\frac{df(X)}{dX} \right)_{X=X_0} \quad (4.2)$$

$$b^* = f(X_0) - X_0 \left(\frac{df(X)}{dX} \right)_{X=X_0} \quad (4.3)$$

こうして線形近似された走行時間関数 $T = a^* X + b^*$ に対して, 前節で述べたアルゴリズムをそのまま用いることができる。

配分計算の手順は次のようになる。

- (1) ゼロフロー時の所要時間を用いて, すべてのゾーン間の最短経路探索を行う。
- (2) 各起終点交通量をゼロフロー時の最短経路に予備配

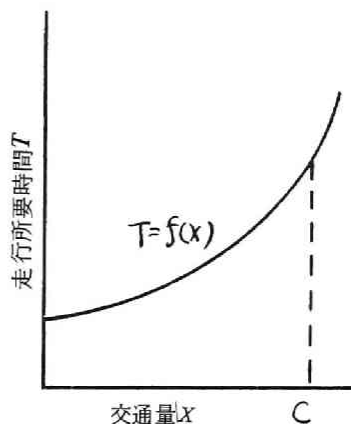


図4・2 一般的な非線形走行時間関数

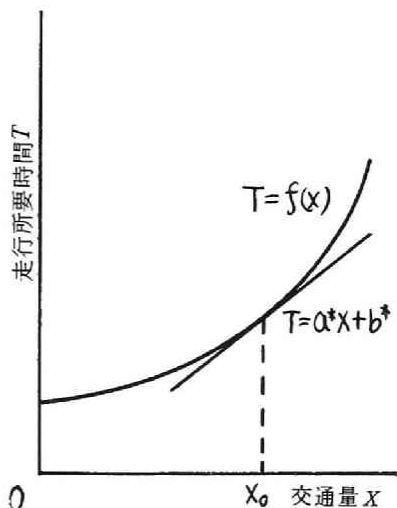


図4・3 走行時間関数の線形近似

分する。これが初期値となる。

- (3) 配分計算を行う際のゾーンペアの順序を決める。すなわちトリップ長の長い順にゾーンペアをならべる。
- (4) 順序にしたがって1ゾーンペアを選び、起終点間の最短経路探索を行う。求まった経路がすでに求められているもの以外なら記憶される。
- (5) いま求まっている区間交通量の点における接線で走行時間関数を線形近似する。
- (6) 着目するゾーンペア以外のパスフローをすべて固定し、このゾーンペアの記憶されている経路を用いて配分計算を行う。
- (7) 順序にしたがって再配分計算をすべてのゾーンペアについて行う。
- (8) (4)~(7)を各区間交通量が収束するまで続ける。

4.2 Wolfeの解法の適用²⁶⁾

交通量と走行所要時間の関係を線形に仮定したときには、等時間原則による交通量配分は2次計画の問題であるから、2次計画を解く既存の手法たとえばWolfeの方法、Bealeの方法などを用いることができる。一方、走行時間関数が非線形ときには、逐次線形近似することによって、線形走行時間関数の場合の計算法を応用することができる。ここでは、線形近似された走行時間関数を用いて、Wolfeの解法によりパスフローを求める方法について説明する。

いま走行時間関数 $f_j(X_j)$ を $X_j^{(0)}$ における接線で近似したものを

$$f_j(X_j)^* = a_j^* X_j + b_j^*$$

としよう。ここに、

$$a_j^* = \left(\frac{df_j(X_j)}{dX_j} \right)_{X_j = X_j^{(0)}}$$

$$b_j^* = f_j(X_j^{(0)}) - X_j^{(0)} \left(\frac{df_j(X_j)}{dX_j} \right)_{X_j = X_j^{(0)}}$$

である。このとき最小とすべき目的関数は次のようになる。

$$F^* = \sum_j \int_0^{X_j} (a_j^* \xi + b_j^*) d\xi$$

$$= \sum_j \left\{ \frac{1}{2} a_j^* (\sum_i \sum_k r_{kj}^i x_k^i)^2 + b_j^* \sum_i \sum_k r_{kj}^i x_k^i \right\} \quad (4.4)$$

ここである特定のゾーンペア- i 以外のパスフローをすべて固定し、特定のゾーンペア- i のパスフローのみを動かして F^* を最小にすることを考える。これは Wolfe の解法を用いると次のようにして解くことができる。

いまラグランジュの未定乗数を λ^ℓ として、次のラグランジュ関数をうる。

$$\phi^\ell = \sum_j \left\{ \frac{1}{2} a_j^* (\sum_i \sum_k r_{kj}^i x_k^i)^2 + b_j^* \sum_i \sum_k r_{kj}^i x_k^i - \lambda^\ell (\sum_k x_k^\ell - s^\ell) \right\}$$

ϕ^ℓ を x_p^ℓ , λ^ℓ で偏微分すると次式をうる。

$$\frac{\partial \phi^\ell}{\partial x_p^\ell} = \sum_j \{ a_j^* (\sum_i \sum_k r_{kj}^i x_k^i) r_{pj}^\ell + b_j^* r_{pj}^\ell \} - \lambda^\ell = \sum_k e_{pk}^\ell x_k^\ell + w_p^\ell - \lambda^\ell$$

$$\frac{\partial \phi^\ell}{\partial \lambda^\ell} = \sum_k x_k^\ell - s^\ell$$

ここに、

$$e_{pk}^\ell = \sum_j a_j^* r_{pj}^\ell r_{kj}^\ell$$

$$w_p^\ell = \sum_j r_{pj}^\ell (a_j^* \sum_{i \neq \ell} \sum_k r_{kj}^i x_k^i + b_j^*)$$

である。 F^* が最小となるための必要十分条件は Kuhn - Tucker の定理より次式がなりたつことである。

$$\left. \begin{aligned} \sum_k e_{pk}^\ell x_k^\ell + w_p^\ell - \lambda^\ell &\geq 0 \\ x_p^\ell (\sum_k e_{pk}^\ell x_k^\ell + w_p^\ell - \lambda^\ell) &= 0 \\ \sum_k x_k^\ell - s^\ell &= 0 \\ x_p^\ell &\geq 0 \end{aligned} \right\} \quad (4.5)$$

$$(p = 1, 2, \dots, n^\ell), (\ell = 1, 2, \dots, s)$$

ここで、

$$\lambda^\ell = \lambda_1^\ell - \lambda_2^\ell \quad \lambda_1^\ell, \lambda_2^\ell \geq 0$$

とし、スラック変数 $v_p^\ell \geq 0$ 、人為変数 $\mu_p^\ell \geq 0$ 、 $z^\ell \geq 0$ を導入すると、式 (4.5) を満足する解 x_p^ℓ を求めることは、制約条件

$$\left. \begin{aligned} -\sum_k e_{pk}^\ell x_k^\ell + \lambda_1^\ell - \lambda_2^\ell + v_p^\ell + \mu_p^\ell &= m_p^\ell \\ x_p^\ell v_p^\ell &= 0 \\ \sum_k x_k^\ell + z^\ell &= s^\ell \\ x_p^\ell \geq 0, \lambda_1^\ell \geq 0, \lambda_2^\ell \geq 0, v_p^\ell \geq 0, \mu_p^\ell \geq 0, z^\ell \geq 0 \\ (p=1, 2, \dots, n^\ell) \quad (\ell=1, 2, \dots, s) \end{aligned} \right\} \quad (4.6)$$

のもとで、

$$z^\ell \rightarrow \min (=0)$$

$$\sum_p \mu_p^\ell \rightarrow \min (=0)$$

とする線形計画問題に帰着する。これはシンプレックス法を2段階用いることによって容易に解が得られる。ただし、 $x_p^\ell v_p^\ell = 0$ の条件から、 x_p^ℓ と v_p^ℓ とが同時に基底に入らないようにする必要がある。まず第1段階として $\sum_p \mu_p^\ell$ を最小にする。最小値はゼロとなる。ついで z^ℓ を最小にする。最小値はもちろんゼロである。こうして式 (4.5) を満足する解 x_p^ℓ を求めることができる。

この方法を用いた一般的な配分計算の手順は前節の場合と全く同様であるのでここでは省略する。

4.3 SUMT 変換適用における問題点²⁵⁾

走行時間関数が一般の非線形関数の場合、等時間原則による交通量配分は非線形最適化問題に置き換えられる。非線形最適化の手法については近年多数の研究がなされ、この方法が非常な発展を遂げている。その中で特に注目されている方法として SUMT 変換があるが、ここでは SUMT 変換の適用例とその問題点を探る。

さて SUMT とは Sequential Unconstrained Minimization Technique の略であって、制約条件のある最適化問題を厳しいペナルティ関数を付け加えることによって、逐次制約条件のない最適化問題に置き換えて解く手法である。このとき制約条件が乱されるけれども、適当に変換された一連の問題に対し、制約条件のない最適化の手法によって実行可能領域内に最小点が見い

出され、その極限として解が求められる。

いま次の制約条件

$$g_i(\mathbf{x}) \geq 0, \quad (i=1, 2, \dots)$$

$$e_j(\mathbf{x}) = 0, \quad (j=1, 2, \dots)$$

のもとで、目的関数 $f(\mathbf{x})$ を最小にする問題を考える。この問題の解は次の制約条件のない最小化問題

$$T(\mathbf{x}, \tau_k) = f(\mathbf{x}) + \tau_k F(\mathbf{g}) + G(\tau_k) \|\mathbf{e}\|^2 \rightarrow \min \quad (4.7)$$

の解の、 $\tau_k \rightarrow 0$ の極限值として求められる。ここに関数 $F(\mathbf{g}) = F(g_i(\mathbf{x}), \text{all } i)$, $G(\tau_k)$ は次の性質をもつものとする。

- (1) $F(\mathbf{g})$ は、 $g_i(\mathbf{x}) > 0$ を満たすすべての点で定義され、かつ有界である。
- (2) 1つの i について $g_i(\mathbf{x}) \rightarrow 0$ となるとき、 $F(\mathbf{g}) \rightarrow \infty$ となる。
- (3) $\tau_k \rightarrow 0$ のとき、 $G(\tau_k) \rightarrow \infty$ である。

また振動パラメータ τ_k は正で単調に減少し、

$$\lim \tau_k = 0 \quad (k \rightarrow \infty)$$

である。

変換式の考え方は次のとおりである。いま境界領域内の点 $\mathbf{x}^{(0)}$ から出発するとき、境界に近づくと $F(\mathbf{g}) \rightarrow \infty$ ($g_i(\mathbf{x}) \rightarrow 0$) の性質から $T(\mathbf{x}, \tau_k) \rightarrow \infty$ となる。したがって境界を侵すことなく、内的実行可能な領域で $T(\mathbf{x}, \tau_k)$ の最小点 $\mathbf{x}(\tau_k)$ を求めることができる。さらに $\tau_k \rightarrow 0$ となるとき、 $G(\tau_k) \rightarrow \infty$ となるから、ノルムの2乗 $\|\mathbf{e}\|^2 = \sum_j e_j^2(\mathbf{x})$ が0にならないとすればならぬ。そうでないならば、 $T(\mathbf{x}, \tau_k)$ は無限に増大するからである。こうして τ_k の値が0に近づくにしたがって $f(\mathbf{x}(\tau_k))$ の数列が $f(\mathbf{x})$ の最小値に収束することが期待できるのである。

Fiacco と Mc Cormich は変換式をつぎのような形で使用している。

$$T(\mathbf{x}, \tau_k) = f(\mathbf{x}) + \tau_k \sum_i \frac{1}{g_i(\mathbf{x})} + \frac{1}{\sqrt{\tau_k}} \sum_j e_j^2(\mathbf{x}) \quad (4.8)$$

このような変換法はもちろん目的関数および制約条件の如何にかかわらず実行できるものではない。しかし次の定理によって条件(1)~(9)が満たされるとき、SUMT変換法が可能である。これらの条件はそう厳しいものではなく、實際上多くの場合満足されているものである。

定理13

次の条件(1)~(9)が満たされるとき、 $\tau_k > 0$ を固定したときの、 $T(\mathbf{x}, \tau_k)$ の唯一の最小点

を $\mathbf{x}^{(k)}$ とすると, $T(\mathbf{x}, \tau_k)$, $k=1, 2, \dots$ の値は, $\tau_k \rightarrow 0$ のとき, もとの最小化問題の解に近づき, $R = \{\mathbf{x} \mid g_i(\mathbf{x}) > 0, \text{ all } i\}$, $R^1 = \{\mathbf{x} \mid e_j(\mathbf{x}) = 0, \text{ all } j\}$ とするとき,

$$\lim_{\tau_k \rightarrow 0} \min T(\mathbf{x}, \tau_k) = \min_{\mathbf{x} \in R \cap R^1} f(\mathbf{x}) \equiv L_f$$

である。

条件

- (1) 内的実行可能な領域 $R^0 = \{\mathbf{x} \mid g_i(\mathbf{x}) > 0, i=1, 2, \dots\}$ は空でなく, R^0 に属する点 \mathbf{x}^0 を必ず求めることができる。
- (2) 目的関数と, 制約条件を表わす関数は, 連続的に 2 回微分可能である。
- (3) 目的関数 $f(\mathbf{x})$ は R 上で下に有界である。すなわち, つぎのような下限 L_f が存在する。

$$f(\mathbf{x}) \geq L_f > -\infty$$

- (4) 定数 K が有限な値をとるとき, 領域 $S = \{\mathbf{x} \mid f(\mathbf{x}) \leq K, \mathbf{x} \in R\}$ は有界である。
- (5) $f(\mathbf{x})$ と $g_i^{-1}(\mathbf{x})$ が凸関数である。したがって, $g_i(\mathbf{x})$ は凹関数である。
- (6) 少なくとも $f(\mathbf{x})$ と $g_i^{-1}(\mathbf{x})$ のうちの 1 つは狭義の凸関数である。
- (7) $R^1 = \{\mathbf{x} \mid e_j(\mathbf{x}) = 0, \text{ all } j\}$ とするとき, $R^0 \cap R^1$ は空集合ではない。
- (8) $\sum_j e_j^2(\mathbf{x})$ は R^0 に属する点 \mathbf{x} において凸である。
- (9) 式 (4.8) によって定義される $T(\mathbf{x}, \tau_k)$ は, τ_k を任意の正の値に固定すると, R^0 上で狭義の凸である。

これらの条件(1)~(9)が満たされるとき, 凸な第 2 種の問題といわれる。

SUMT 法を実行するときの重要な問題は, 摂動パラメータの初期値 τ_1 のじょうずな選び方である。一般に τ_1 が大きすぎると, 不等式制約項 $\tau_1 \sum_i g_i^{-1}(\mathbf{x})$ の割合が非常に大きくなり, $T(\mathbf{x}, \tau_k)$ の最小点 $\mathbf{x}(\tau_k)$ は正解から非常に離れる。逆に τ_1 が小さいと, 等式制約項 $\tau_1^{1/2} \sum_j e_j^2(\mathbf{x})$ の割合が非常に大きくなる。その結果, 解の近くでは $T(\mathbf{x}, \tau_1)$ の等高線は非常に長くかつ狭くなり, このため制約条件なしの最小化を実行することが困難になる。いずれにしても τ_1 の適正な選択法は問題のスケールに関係しているといえよう。

SUMT 法におけるもう 1 つの問題は, 制約条件なしの最小化をいかに行うかということである。これには普通, 傾斜法が用いられる。傾斜法のうちでも, Davidon, Fletcher, Powell による共役方向を利用する最小化法が, 現在使われている一般目的のための最小化法の中では最も有力な方法とされている。Davidon, Fletcher, Powell の方法は, 目的関数を 2 次形式によって近似したときの 2 次部分の逆行列の近似値を使って次の探索の方向をきめ, その探索の結果を

用いてさらに逆行列の近似値を改良するものである。逆行列を改良するとき、それによって決まる方向が共役になるように決められる。

アルゴリズムは次のとおりである。

(1) $d_i = -H_{i-1}^{-1} g_i$ を求める。

(2) 次式を最小にする λ_i を求める。

$$q_i(\lambda) = F(x^{(i)} + \lambda d_i)$$

(3) $x^{(i+1)} = x^{(i)} + \lambda_i d_i$ とし、

$$y_i = g_{i+1} - g_i$$

とする。

$$(4) \quad H_i = H_{i-1} + \lambda_i \frac{d_i d_i^T}{g_i^T H_{i-1} g_i} - \frac{H_{i-1} y_i y_i^T H_{i-1}}{y_i^T H_{i-1} y_i}$$

を求める。

ここに $g_i = \nabla F(x^{(i)})$ であり、第1回目のステップでは $H_0 = I$ とするのが普通である。

さてパスフローを変数とすると、等時間原則による交通量配分は、制約条件

$$\sum_k x_k^i = S^i \quad (i=1, 2, \dots, S)$$

$$x_k^i \geq 0 \quad (i=1, 2, \dots, S; k=1, 2, \dots, n^i)$$

のもとで、目的関数

$$J = \int_0^T \sum_k \sum_j r_{kj}^i x_k^i f_j(\xi) d\xi$$

を最小にする問題になる。したがってSUMT法を用いるとき、変換式は次のようになる。

$$T(x, \tau_k) = \int_0^T \sum_i \sum_k \tau_{kj}^i x_k^i f_j(\xi) d\xi$$

$$+ \tau_k \sum_i \sum_k \frac{1}{x_k^i} + \frac{1}{\sqrt{\tau_k}} \sum_i (\sum_k x_k^i - S^i)^2 \quad (4.9)$$

ここで問題になるのは、あらかじめ解となる経路を求めておくことが一般的に困難であるということである。また経路交通量がゼロに近づくと、 $T(x, \tau_k)$ の値が無限に大きくなってしまいうので、最小化計算を安定させ、変数を少くするという意味からそのような経路は捨てた方がよい。これらの点を考慮に入れ、次の手順によって配分計算を行う。

- (1) ゼロフロー時の最短経路を探索する。
- (2) すべてのOD交通量をそれに流す。
- (3) 各アークの走行時間を修正する。
- (4) 再び最短経路探索を行ない、そのパスが以前のと違っておればこれを新しい変数に組み込む。
- (5) 選ばれた変数に対して、目的関数 F を最小にするようなパスフローをSUMT法により求める。
- (6) 各経路の走行所要時間を求める。
- (7) ゾーンペアごとに、パスフローのうちゼロに非常に近く、かつその経路の走行所要時間が他の経路のそれより大であるときは、その経路を消去する。
- (8) 各アークの走行所要時間を修正する。
- (9) (4)にもどる。

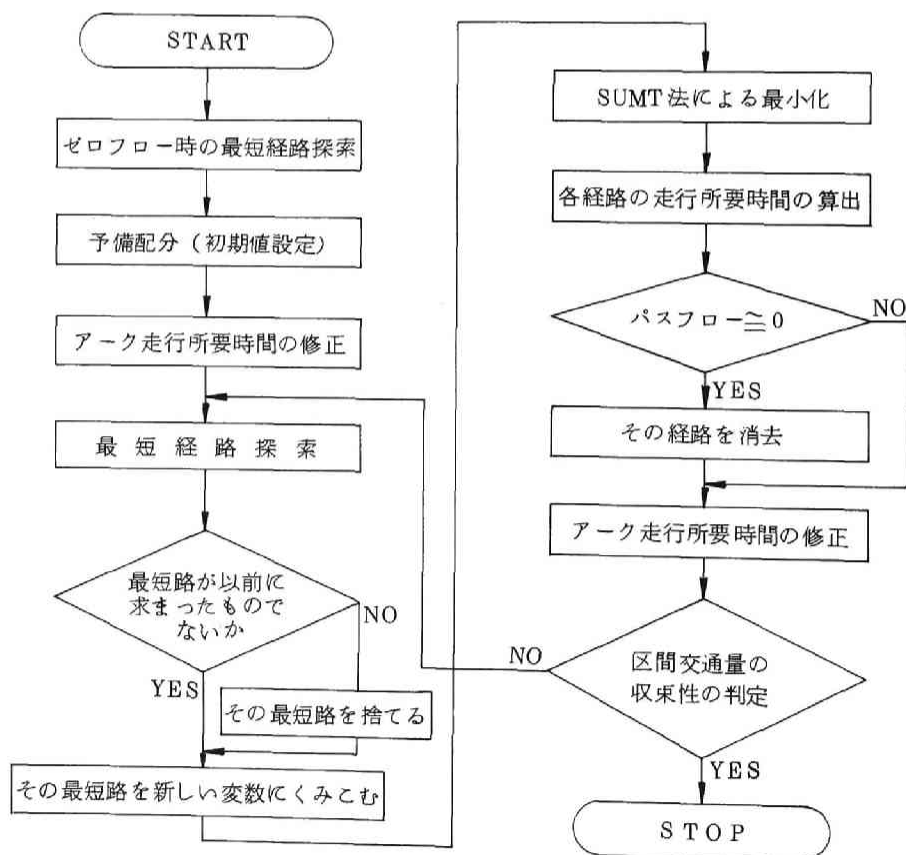


図4・4 SUMT法による配分のブロックチャート

4.4 計 算 例

これまでに述べた配分法によって、非線形走行時間関数を用いて実際に配分計算を行う。まず4.1の逐次線形近似による方法および4.2のWolfeの解法による方法の計算例⁵⁴⁾を示す。

ここでは配分対象道路網、OD表は線形走行時間関数の場合の計算例で示したものをを用いる。走行時間関数は、逐次線形近似による方法については、

$$T_j = a_j e^{b_j X_j}$$

とし、Wolfeの解法による方法については、

$$T_j = a_j X_j^2 + b_j$$

とする。ここに a_j 、 b_j は定数であり、関数が次の2点 P_1 、 P_2 を通るものとして算出する。

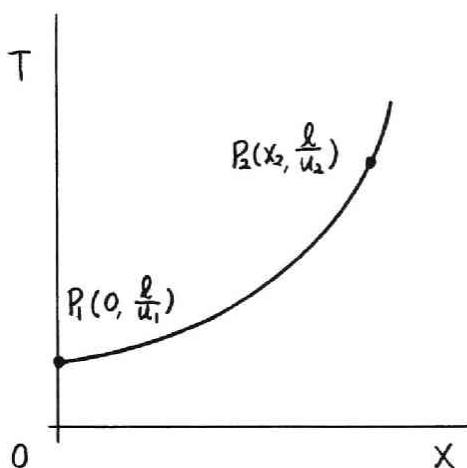


図4・5 非線形走行時間関数

		2車線道路	4車線道路	6車線道路
P_1	u_1	60 km/h	80 km/h	80 km/h
	X_2	1200 v.p.h	4800 v.p.h	7200 v.p.h
P_2	u_2	30 km/h	40 km/h	40 km/h

表4・1 非線形走行時間関数上の2点

算出された定数値はそれぞれ表4・3および表4・4に示している。両非線形関数についてのそれぞれの方法による配分計算結果を表4・5～表4・8および図4・7～図4・8に示す。

FACOM230-60による計算時間は、逐次線形近似による方法については40.03秒、Wolfeの解法による方法については43.42秒であった。

つぎにSUMT変換により、図4・9に示す道路網で計算を行う⁵⁵⁾。交通量と走行所要時間の関係は、

$$T_j = a_j e^{b_j X}$$

とし、図4・5における2点 P_1 、 P_2 を通るという条件により、定数 a_j 、 b_j を算出したものを表4・9に示している。またOD表は表4・10に示す。計算によって求めたルートフロー、ルート走行時間は表4・12に、区間交通量、区間走行時間は表4・11および図4・10に示し

ている。

計算の結果、SUMT変換を適用した場合には計算に非常に多くの時間を要することがわかった。上の計算例の場合ではFACOM 230-60を20分使用してもなおかつ十分収束していない。計算に多くの時間を要する理由は最小化の回数が増えるからである。いま修正配分の繰り返し回数を N 、摂動パラメーター T_k の個数を R とすると、最小化の回数 M は、

$$M = N \times R$$

となる。線形走行時間関数を用いた等時間原則による交通量配分を2次計画法で解くと $M=1$ であるから、SUMT変換を適用すると最小化の回数だけでもその NR 倍となる。

SUMT変換を適用する場合の他の問題として収束性の判定の問題がある。等時間原則による交通量配分ではパスフローは一意的には決まらない。これは目的関数が凸関数ではあるが狭義の凸関数ではないということに起因している。したがってSUMT変換が適用できるための必要十分条件(1)~(9)のうち、(6)、(9)は厳密には満たしていないことになる。それゆえ収束性の判定に適当なものを用いないと、区間交通量自体は収束しているのにパスフローはいつまでも収束しないということになる恐れがある。

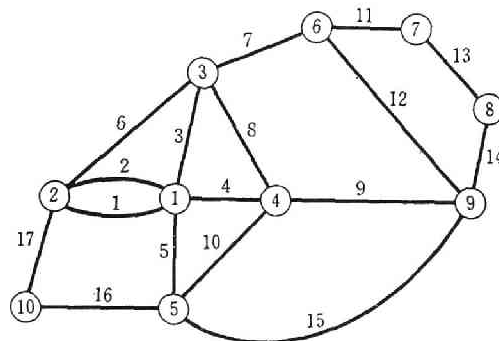


図4・6 配分対象道路網図

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	ノード
—	218109	53940	37095	14188	7763	1393	6248	3000	3480	1
	—	14134	2011	1111	1042	459	1445	549	425	2
		—	9310	396	27169	478	854	1152	45	3
			—	2354	602	123	284	2403	32	4
				—	271	134	399	8415	35	5
					—	2559	1245	1925	12	6
						—	66648	2958	11	7
							—	26822	29	8
								—	9	9
									—	10

表4・2 O D表(台/日)

リンクj	幅 (車線)	距離 (km)	a_j (分)	b_j (1/台)
1	6.	26.7	0.2002500010E 02	0.80225368E-05
2	4.	28.5	0.2137500000E 02	0.12033805E-04
3	4.	28.9	0.2167500019E 02	0.12033805E-04
4	4.	48.0	0.3600000000E 02	0.12033805E-04
5	2.	66.2	0.6620000076E 02	0.48135221E-04
6	2.	64.6	0.6460000038E 02	0.48135221E-04
7	4.	25.3	0.1897500038E 02	0.12033805E-04
8	2.	39.6	0.3960000038E 02	0.48135221E-04
9	2.	106.4	0.1063999996E 03	0.48135221E-04
10	2.	99.5	0.9950000000E 02	0.48135221E-04
11	2.	109.9	0.1098999996E 03	0.48135221E-04
12	2.	119.3	0.1192999992E 03	0.48135221E-04
13	4.	30.7	0.2302500010E 02	0.12033805E-04
14	4.	64.1	0.4807500076E 02	0.12033805E-04
15	2.	375.9	0.3759000015E 03	0.48135221E-04
16	2.	49.2	0.4919999981E 02	0.48135221E-04
17	2.	71.5	0.7150000000E 02	0.48135221E-04

表4・3 走行時間関数の定数 ($T_j = a_j e^{b_j X_j}$)

リンクj	幅 (車線)	距離 (km)	a_j (分/台)	b_j (分)
1	6.	26.7	0.2682532751E-08	0.20025000E 02
2	4.	28.5	0.6442599787E-08	0.21375000E 02
3	4.	28.9	0.6533022345E-08	0.21675000E 02
4	4.	48.0	0.1085069434E-07	0.36000000E 02
5	2.	66.2	0.3192515479E-06	0.66200001E 02
6	2.	64.6	0.3115354943E-06	0.64600000E 02
7	4.	25.3	0.5719220209E-08	0.18975000E 02
8	2.	39.6	0.1909722229E-06	0.39600000E 02
9	2.	106.4	0.5131172855E-06	0.10640000E 03
10	2.	99.5	0.4798418161E-06	0.99500000E 02
11	2.	109.9	0.5299961430E-06	0.10990000E 03
12	2.	119.3	0.5753279311E-06	0.11930000E 03
13	4.	30.7	0.6939923303E-08	0.23025000E 02
14	4.	64.1	0.1449019837E-07	0.48075001E 02
15	2.	375.9	0.1812789350E-05	0.37590000E 03
16	2.	49.2	0.2372685159E-06	0.48200000E 02
17	2.	71.5	0.3448109567E-06	0.71500000E 02

表4・4 走行時間関数の定数 ($T_j = a_j X_j^2 + b_j$)

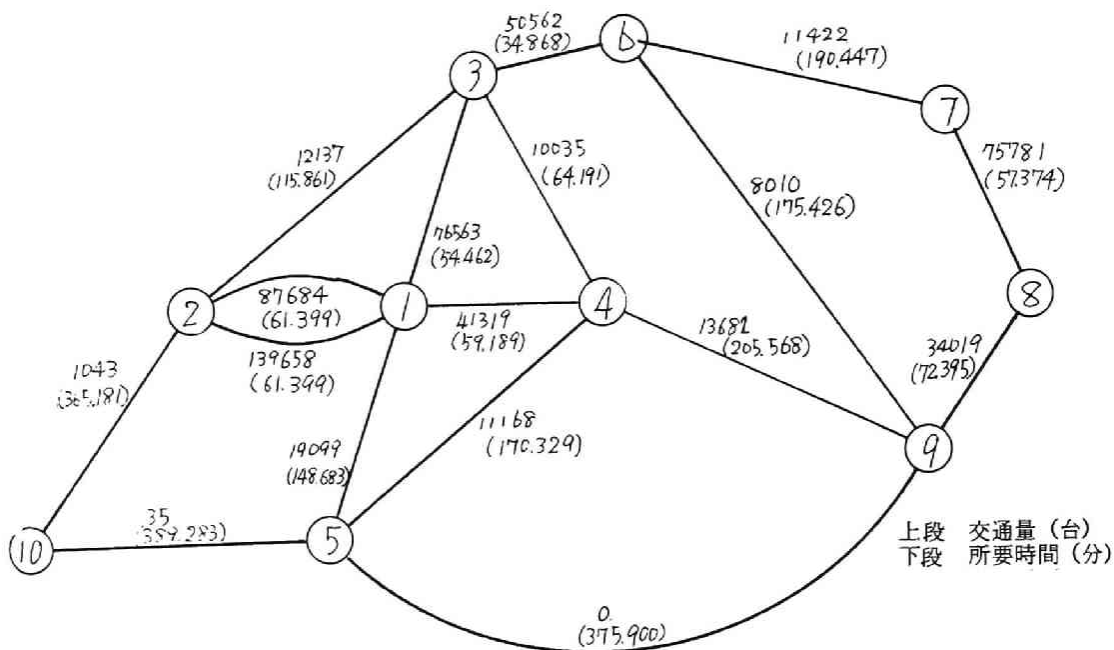


図4・7 逐次線形近似法による配分交通量と所要時間

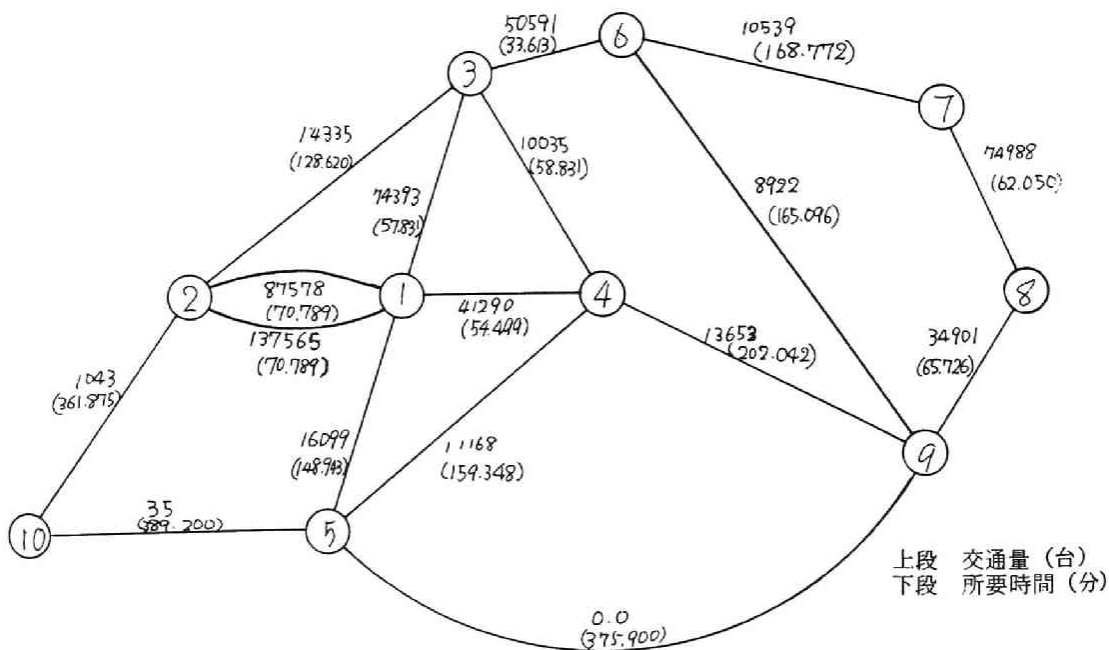


図4・8 Wolfの解法による配分交通量と所要時間

リンク番号 \ 区間交通量	$X^{(0)}$	$X^{(1)}$	$X^{(2)}$	$X^{(3)}$	$X^{(4)}$	$X^{(5)}$
1	239478	138454	139614	139656	139658	139658
2	0	86890	87655	87682	87684	87684
3	87721	73929	76493	76561	76563	76563
4	42696	41955	41316	41319	41319	41319
5	16498	16099	16099	16099	16099	16099
6	0	14134	12209	12139	12136	12136
7	49584	49926	50565	50562	50562	50562
8	10035	10035	10035	10035	10035	10035
9	14660	14318	13679	13682	13682	13682
10	10769	11168	11168	11168	11168	11168
11	15377	10917	11424	11422	11422	11422
12	3077	7881	8011	8010	8010	8010
13	79826	75364	75872	75871	75871	75871
14	30064	34526	34017	34019	34019	34019
15	0	0	0	0	0	0
16	35	35	35	35	35	35
17	1043	1043	1043	1043	1043	1043

* $X^{(0)}$ は予備配分フロー

表 4・7 繰り返し5回までの各段階での区間交通量 (台)
(逐次線形近似法による)

リンク番号 \ 区間交通量	$X^{(0)}$	$X^{(1)}$	$X^{(2)}$	$X^{(3)}$	$X^{(4)}$	$X^{(5)}$
1	239478	106656	135749	137563	137565	137565
2	0	118688	89381	87580	87578	87578
3	87721	73573	74381	74393	74393	74393
4	42696	42311	41289	41290	41290	41290
5	16498	16099	16099	16099	16099	16099
6	0	14134	14348	14335	14335	14335
7	49584	49573	50592	50591	50591	50591
8	10035	10035	10035	10035	10035	10035
9	14660	14671	13652	13653	13653	13653
10	10769	11168	11168	11168	11168	11168
11	15377	9865	10540	10539	10539	10539
12	3077	8578	8922	8922	8922	8922
13	79826	74314	74989	74988	74988	74988
14	30064	35576	34901	34902	34902	34902
15	0	0	0	0	0	0
16	35	35	35	35	35	35
17	1043	1043	1043	1043	1043	1043

* $X^{(0)}$ は予備配分フロー

表 4・8 繰り返し5回までの各段階での区間交通量 (台)
(Wolfの解法による)

OD _i	O	D	ルート _k	σ_k^i	x_k^i (台)	t_k^i (分)
20	3	6	1	000000100000000000	27169.00	34.86836
1	1	2	1	100000000000000000	132922.15	61.39894
1	1	2	2	010000000000000000	85186.85	61.39894
2	1	3	1	001000000000000000	53940.00	54.46215
40	7	8	1	00000000000010000	66648.00	57.37439
8	1	4	1	000100000000000000	37095.00	59.18922
18	3	4	1	000000010000000000	9310.00	64.19120
8	1	6	1	001000100000000000	7763.00	89.33051
10	2	3	1	101000000000000000	1997.82	115.86109
10	2	3	2	000001000000000000	12136.18	115.86109
43	8	9	1	00000000000001000	26822.00	72.39517
11	2	4	1	100100000000000000	0.00	120.58816
11	2	4	2	010100000000000000	2011.00	120.58816
26	4	6	1	000000110000000000	602.00	99.05956
13	2	6	1	101000100000000000	555.98	150.72945
13	2	6	2	011000100000000000	486.02	150.72945
4	1	5	1	000010000000000000	14187.00	143.68299
41	7	9	1	00000000000011000	2958.00	129.76957
12	2	5	1	100100000000000000	1111.00	205.08193
19	3	5	1	001010000000000000	396.00	198.14513
25	4	5	1	000000000100000000	2354.00	170.32899
29	4	9	1	000000001000000000	2403.00	205.56754
31	5	6	1	001010100000000000	271.00	233.01350
36	6	7	1	000000000100000000	2559.00	190.44704
38	6	9	1	000000000010000000	1925.00	175.42626
21	3	7	1	000000100010000000	478.00	225.31540
37	6	8	1	00000000001010000	226.67	247.82143
37	6	8	2	00000000000101000	1018.33	247.82143
23	3	9	1	00000010000100000	1152.00	210.29462
8	1	9	1	000100001000000000	307.74	264.75677
8	1	9	2	00100010000100000	2692.26	264.75677
6	1	7	1	00100010001000000	1393.00	279.77755
22	3	8	1	00000010001010000	228.02	282.68980
22	3	8	2	00000010000101000	625.98	282.68980
28	4	8	1	00000000100001000	284.00	277.96272
16	2	9	1	100100001000000000	452.70	326.15571
16	2	9	2	10100010000100000	96.30	326.15571
27	4	7	1	00000011001000000	123.00	289.50659
14	2	7	1	10100010001000000	459.00	341.17649
7	1	8	1	00100010001010000	4842.64	337.15194
7	1	8	2	00010000100001000	1405.36	337.15194
15	2	8	1	10100010001010000	944.65	398.55088
15	2	8	2	10100010000101000	500.38	398.55088
34	5	9	1	00000000110000000	8415.00	375.89654
32	5	7	1	00101010001000000	134.00	423.46053

OD _i	O	D	ルート ℓ	r_{ℓ}^i	x_{ℓ}^i (台)	t_{ℓ}^i (分)
33	5	8	1	00101010001010000	0.0	480.83493
33	5	8	2	00000000110001000	399.00	448.29171
17	2	10	1	000000000000000001	425.00	365.18129
9	1	10	1	100000000000000001	480.00	426.58024
35	5	10	1	000000000000000010	35.00	389.28296
24	3	10	1	101000000000000001	45.00	481.04239
30	4	10	1	100100000000000001	32.00	485.76946
39	6	10	1	101000100000000001	12.00	515.91075
45	9	10	1	100100001000000001	8.95	691.33702
45	9	10	2	101000100001000001	0.05	691.33702
42	7	10	1	101000100010000001	11.00	706.35779
44	8	10	1	101000100010100001	23.10	763.73218
44	8	10	2	100100001000010001	5.90	763.73218

表4・5 逐次線形近似法によるパズフロー

OD _i	O	D	ルート ℓ	r_{ℓ}^i	x_{ℓ}^i (台)	t_{ℓ}^i (分)
20	3	6	1	000000100000000000	27169.00	33.61327
1	1	2	1	100000000000000000	130530.85	70.78931
1	1	2	2	010000000000000000	87578.16	70.78931
2	1	3	1	001000000000000000	53940.00	53.83094
40	7	8	1	00000000000010000	66648.00	62.05006
3	1	4	1	000100000000000000	37095.00	54.49862
18	3	4	1	000000010000000000	9310.00	58.83114
5	1	6	1	001000100000000000	7763.00	91.44423
10	2	3	1	101000000000000000	30.10	128.62027
10	2	3	2	000001000000000000	14103.90	128.62027
43	8	9	1	00000000000001000	26822.00	65.72576
11	2	4	1	100100000000000000	2011.00	125.28794
26	4	6	1	000000110000000000	602.00	92.44441
13	2	6	1	101000100000000000	1042.00	162.23354
4	1	5	1	000010000000000000	14187.00	148.94291
41	7	9	1	00000000000011000	2958.00	127.77583
12	2	5	1	100100000000000000	1111.00	219.73223
19	3	5	1	001010000000000000	396.00	206.77387
25	4	5	1	000000001000000000	2354.00	159.34790
29	4	9	1	000000001000000000	2403.00	202.04205
29	4	9	2	000000110000000000	0.00	202.54084
31	5	6	1	001010100000000000	271.00	240.38715
36	6	7	1	000000000100000000	2559.00	168.77213
38	6	9	1	000000000010000000	1925.00	165.09643
21	3	7	1	000000010010000000	478.00	202.38541

OD _i	O	D	ルート _k	τ_k^i	x_k^i (台)	t_k^i (分)
37	6	8	1	00000000001010000	232.30	230.82219
37	6	8	2	00000000000101000	1012.70	230.82219
23	3	9	1	00000010000100000	1152.00	198.70970
8	1	9	1	00010000100000000	0.46	256.54066
8	1	9	2	00100010000100000	2999.54	256.54066
6	1	7	1	00100010001000000	1393.00	260.21636
22	3	8	1	00000010001010000	291.00	264.43546
22	3	8	2	00000010000101000	563.00	264.43546
28	4	8	1	00000000100001000	284.00	267.76781
16	2	9	1	10010000100000000	317.68	327.32998
16	2	9	2	00000110000100000	231.32	327.32998
27	4	7	1	00000011001000000	123.00	261.21655
14	2	7	1	10100010001000000	458.98	331.00568
14	2	7	2	00000110010000000	0.02	331.00568
7	1	8	1	00100010001010000	4430.38	322.26643
7	1	8	2	00010000100001000	1817.62	322.26643
15	2	8	1	10100010001010000	399.78	393.05573
15	2	8	2	10100010000101000	1029.38	393.05573
15	2	8	3	10010000100001000	15.83	393.05573
34	5	9	1	00000000110000000	8415.00	361.38994
32	5	7	1	00101010001000000	134.00	409.15928
33	5	8	1	00101010001010000	0.00	471.20935
33	5	8	2	00000000110000000	399.00	427.11570
17	2	10	1	00000000000000001	425.00	361.87511
9	1	10	1	10000000000000001	480.00	432.66442
35	5	10	1	00000000000000010	35.00	389.20029
27	3	10	1	10100000000000001	45.00	490.49538
30	4	10	1	10010000000000001	32.00	487.16304
39	6	10	1	10100010000000001	12.00	524.10866
45	9	10	1	10010000100000001	0.02	689.20508
45	9	10	2	10100010000100001	8.98	689.20508
42	7	10	1	10100010001000001	11.00	692.88078
44	8	10	1	10100010001010001	29.00	754.93085

表4・6 Wolfeの解法によるパスフロー

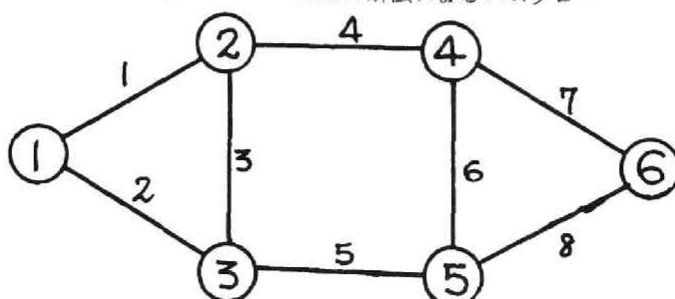


図4・9 配分対象道路網図

リンク番号 j	区間幅 (車線数)	区間長 (km)	a_j (分)	b_j (分/台) $\times 10^{-4}$
1	4	2.6	1.950	1.4441
2	2	4.3	4.300	5.7762
3	4	2.4	1.800	1.4441
4	6	3.5	2.625	0.9627
5	2	4.0	4.000	5.7762
6	4	2.1	1.575	1.4441
7	2	2.2	2.200	5.7762
8	4	1.0	0.750	1.4441

表 4・9 走行時間関数の定数

1	2	3	4	5	6	ノード
—	800	250	150	50	50	1
	—	500	1000	150	100	2
		—	600	200	300	3
			—	400	200	4
				—	400	5
					—	6

表 4・10 配分対象OD表 (台/時)

リンク j	リンク交通量 x_j (台/時)	リンク走行時間 (分)
1	1207.3	2.32
2	92.7	4.53
3	1257.3	2.16
4	2099.9	3.21
5	500.0	5.34
6	669.3	1.73
7	280.6	2.59
8	769.3	8.38

表 4・11 配分交通量と走行時間

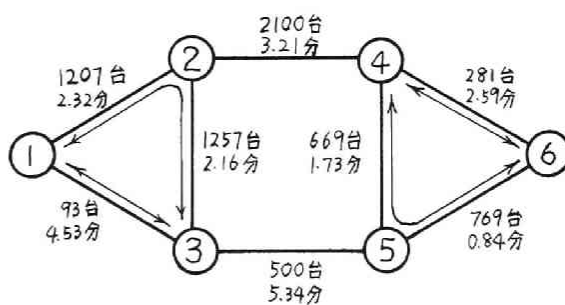


図 4・10 配分交通量と走行時間

OD 番号	OD			k	通 算	ル ー ト 行 列								ルート走行時間 (分)	ルートフロー (台/時)
						1	2	3	4	5	6	7	8		
1	1	2	1	1	1	1								2.32	800.0
2	1	3	1	2	1			1						4.48	157.3
2	1	3	2	3			1							4.54	92.7
3	1	4	1	4	1				1					5.53	150.0
4	1	5	1	5	1				1		1			7.27	50.0
5	1	6	1	6	1				1			1		8.12	47.8
5	1	6	2	7	1				1		1		1	8.11	2.1
6	2	3	1	8				1						2.16	500.0
7	2	4	1	9					1					3.21	1000.0
8	2	5	1	10					1		1			4.95	150.0
9	2	6	1	11					1			1		5.80	91.4
9	2	6	2	12					1		1		1	5.79	8.6
10	3	4	1	13				1	1					5.37	600.0
11	3	5	1	14						1				5.34	200.0
12	3	6	1	15						1			1	6.18	300.0
13	4	5	1	16							1			1.73	400.0
14	4	6	1	17								1		2.59	141.4
14	4	6	2	18							1		1	2.57	58.6
15	5	6	1	19									1	0.84	400.0

表4・12 ルートフローとルート走行時間

第5章 交通量配分と道路網計画に関連する諸問題

5.1 総走行時間最小化原則と等時間原則との関連性

Wardropは道路網における交通量の均衡分布に関する基準として等時間原則と総走行時間最小化原則の2つを提唱した。等時間原則は各個人の時間損失という非効用を最小にするものであり、一方総走行時間最小化原則は、その道路網を利用する個人の集合からなる社会の時間損失という非効用を最小にするものである。それではこの両基準相互間にどのような関連性が存在するであろうか。各個人の自己の損失を最小にしようとする行動が全体の損失を最小にすることになるのであろうか。

もし走行時間が交通量によって変わらないとするなら、各運転者が起終点間の所要時間が最短となる経路を選んだとき、それは同時に総走行時間をも最小にすることは自明である。しかし走行時間が交通量によって影響を受けるのなら、そうはいえないことになる。

等時間原則による交通量配分は次のような数理計画問題と等価である。

目的関数

$$J = \sum_j \int_0^{X_j} f_j(\xi) d\xi \rightarrow \min \quad \dots\dots\dots (5 \cdot 1)$$

制約条件

$$\begin{aligned} \sum_k x_k^i &= S^i \\ X_j &= \sum_i \sum_k r_{kj}^i x_k^i \quad \left(\begin{matrix} i = 1, 2, \dots, s \\ k = 1, 2, \dots, n^i \\ j = 1, 2, \dots, m \end{matrix} \right) \quad \dots\dots\dots (5 \cdot 2) \\ x_k^i &\geq 0 \end{aligned}$$

一方総走行時間最小化原則による交通量配分は次のような数理計画問題と等価である。

目的関数

$$F = \sum_j X_j f_j(X_j) \rightarrow \min \quad \dots\dots\dots (5 \cdot 3)$$

制約条件

$$\sum_k x_k^i = S^i$$

$$\begin{aligned}
 X_j &= \sum_i \sum_k r_{kj}^i x_k^i & \begin{pmatrix} i = 1, 2, \dots, s \\ k = 1, 2, \dots, n^i \\ j = 1, 2, \dots, m \end{pmatrix} & \dots\dots\dots (5 \cdot 4) \\
 x_k^i &\geq 0
 \end{aligned}$$

両問題の制約条件は等しいから変数のとる領域は同一である。問題の様相を調べるためには目的関数を吟味すればよい。目的関数 J については $f_j(\xi)$ が単調増加関数であり、目的関数 F については $X_j f_j(X_j)$ が凸関数であるという前提がある。

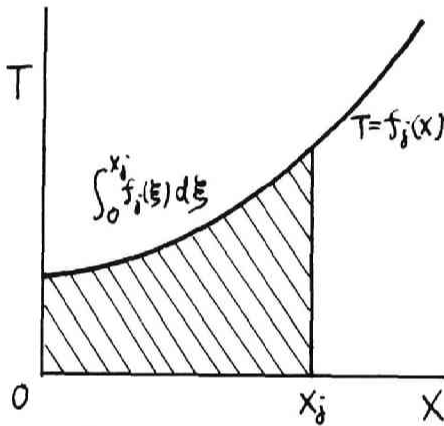


図 5・1 等時間原則の目的関数

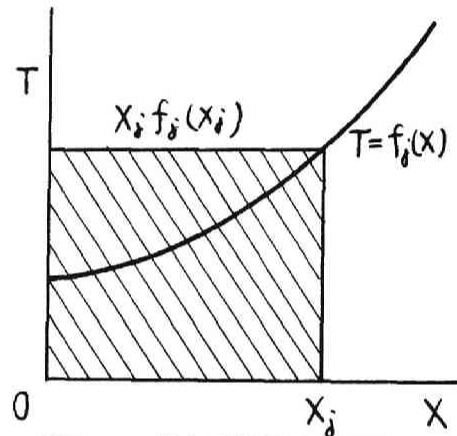


図 5・2 総走行時間最小化原則の目的関数

目的関数 J と F はアークに関して分離形となっていることが特徴であり、その各項は J については 0 から X_j にいたるまでの $T = f_j(X_j)$ 下の面積の総和を、 F については $X_j, f_j(X_j)$ を 2 辺とする矩形の面積の総和を表わしている。

ところで目的関数 F は次のように書きかえられる。

$$\begin{aligned}
 F &= \sum_j X_j f_j(X_j) = \sum_j \int_0^{X_j} \frac{d}{d\xi} \{ \xi f_j(\xi) \} d\xi \\
 &= \sum_j \int_0^{X_j} \varphi_j(\xi) d\xi & \dots\dots\dots (5 \cdot 5)
 \end{aligned}$$

ここに、

$$\varphi_j(\xi) = \frac{d}{d\xi} \{ \xi f_j(\xi) \} \quad \dots\dots\dots (5 \cdot 6)$$

$X_j f_j(X_j)$ は凸関数であるという仮定から、

$$\frac{d}{d\xi} \varphi_j(\xi) = \frac{d^2}{d\xi^2} \{ \xi f_j(\xi) \} \geq 0$$

よって関数 $\varphi_j(\xi)$ は単調増加である。式 (5.1) と (5.5) を比較すると、目的関数 F が走行時間関数の $f_j(\xi)$ から $\varphi_j(\xi)$ への変換によって目的関数 J と同形に書きかえられていることがわかる。したがって F の最小値を求めるためには、 $f_j(\xi)$ から $\varphi_j(\xi)$ への変換によって J と同形に書き換えられた関数 $\sum_j \int_0^{X_j} \varphi_j(\xi) d\xi$ の最小値を求めればよい。ところがこの最小値を求めることは等時間原則による交通量配分問題と一致するから、すでにこれまでに述べてきた手法によって解を求めることができる。関数 $\varphi_j(\xi)$ は、もし運転者が実際の所要時間 $f_j(\xi)$ にもとづいてではなく、関数値 $\varphi_j(\xi)$ をあたかも所要時間のごとく考えて起終点間の走行時間が最短となる経路を選んだとき、総走行時間が最小となる交通パターンを現出するという意味で、総走行時間最小化原則における影の所要時間と名づけることができよう。

逆に目的関数 J は次のように書き換えられる。

$$\begin{aligned} J &= \sum_j \int_0^{X_j} f_j(\xi) d\xi = \sum_j X_j \frac{1}{X_j} \int_0^{X_j} f_j(\xi) d\xi \\ &= \sum_j X_j \phi_j(X_j) \end{aligned} \quad \dots\dots\dots (5.7)$$

ここに、

$$\phi_j(X_j) = \frac{1}{X_j} \int_0^{X_j} f_j(\xi) d\xi \quad \dots\dots\dots (5.8)$$

$f_j(\xi)$ は単調増加関数であるということより、

$$\frac{d^2}{dX_j^2} X_j \phi_j(X_j) = \frac{d^2}{dX_j^2} \int_0^{X_j} f_j(\xi) d\xi = \frac{d}{dX_j} f_j(X_j) \geq 0$$

よって目的関数の凸性は保証される。

走行時間関数 $f_j(X_j)$ の $\phi_j(X_j)$ への変換によって目的関数 J が F と同形に変換される。もし総走行時間最小化原則による交通配分の計算手法が存在すれば、走行時間関数の $f_j(X_j)$ から $\phi_j(X_j)$ への変換によって、等時間原則による交通量配分も全く同様に計算することができる。

次に等時間原則による交通量配分と総走行時間最小化原則による交通量配分がどのような場合に一致するかを見よう。配分交通量が一致するのは、

$$\int_0^{X_j} f_j(\xi) d\xi = \alpha X_j f_j(X_j) \quad \dots\dots\dots (5 \cdot 9)$$

となる場合である。ここに α は定数である。

両辺を X_j で微分すると、

$$f_j(X_j) = \alpha f_j(X_j) + \alpha X_j \frac{d f_j(X_j)}{d X_j}$$

$$(\alpha - 1) \frac{d X_j}{X_j} = \alpha \frac{d f_j(X_j)}{f_j(X_j)}$$

両辺を積分して

$$(\alpha - 1) \int \frac{d X_j}{X_j} = \alpha \int \frac{d f_j(X_j)}{f_j(X_j)} + \beta$$

$$\beta + (\alpha - 1) \log X_j = \alpha \log f_j(X_j)$$

よって、

$$f_j(X_j) = e^{\beta} X_j^{\frac{\alpha-1}{\alpha}} = C X_j^r \quad \dots\dots\dots (5 \cdot 10)$$

ここに、 β, C, r は定数であり、 $f_j(X_j)$ が単調増加関数であるということより、

$$C > 0, \quad r \geq 0$$

である。

走行時間関数が上式のような形で与えられる場合のみ、等時間原則による配分交通量と総走行時間最小化原則による配分交通量は一致する。 $r=0$ すなわち走行時間が交通量によって変化しないなら、両配分原則による配分交通量が一致するのは当然である。 $r>0$ のときには $f_j(0)=0$ となるから、これは交通量がゼロに近づくと走行速度が無限大となることを意味し著しく非現実的である。したがって実際現象に即した走行時間関数を用いたとき、両配分原則による解は一致しないことになる。

走行時間関数 $f_j(\xi)$ の $\varphi_j(\xi)$ への変換を利用して、総走行時間最小化原則による交通量配分の計算を行った。道路網、OD表は第3章の計算例で用いたものであり、計算結果は表5・3～5・4お

よび図 5・4 ～ 5・5 に示されている。

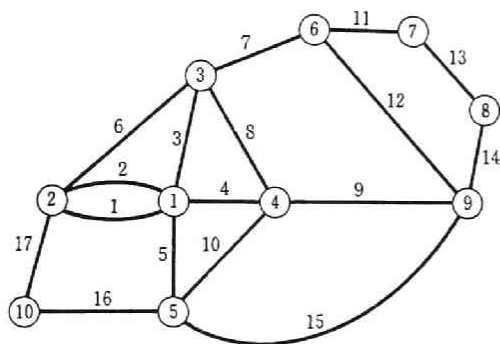


図 5・3 配分対象道路網図

リンク(j)	a_j (分/台)	b_j (分)
1	0.00023177	20.025
2	0.00037109	21.375
3	0.00037630	21.675
4	0.00062500	36.000
5	0.00459722	66.200
6	0.00447222	64.400
7	0.00032943	18.975
8	0.00275000	39.600
9	0.00738889	106.400
10	0.00690972	99.500
11	0.00763194	109.900
12	0.00828472	119.300
13	0.00039974	23.025
14	0.00083464	48.075
15	0.02610417	375.900
16	0.00341667	389.200
17	0.00496528	361.500

表 5・1 走行時間関数の定数表

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	ノード
—	218109	53490	37095	14188	7763	1393	6248	3000	480	1
	—	14134	2011	1111	1042	459	1445	549	425	2
		—	9310	396	27169	478	854	1152	45	3
			—	2354	602	123	284	2403	32	4
				—	271	134	399	8415	35	5
					—	2559	1245	1925	12	6
						—	66648	2958	11	7
							—	26822	29	8
								—	9	9
									—	10

表 5・2 配分対象OD表

区間交通量 リンク番号	$X^{(0)}$	$X^{(1)}$	$X^{(2)}$	$X^{(3)}$	$X^{(4)}$	$X^{(5)}$
1	239478	137305	141605	141621	141623	141623
2	0	90947	86632	86632	86633	86633
3	87721	76844	76388	76294	76297	76297
4	42696	41948	42389	42499	42499	42499
5	16498	16099	16099	16099	16099	16099
6	0	11224	11240	11224	11221	11221
7	49584	50100	49491	49381	49381	49381
8	10035	10203	10035	10035	10035	10035
9	14660	11897	12248	12337	12338	12338
10	10769	8921	8663	8643	8643	8643
11	15377	10656	10583	10529	10529	10529
12	3077	8314	7778	7721	7721	7721
13	79826	75105	75032	74978	74978	74978
14	30064	34784	34857	34911	34911	34911
15	0	2246	2504	2524	2524	2524
16	35	35	35	35	35	35
17	1043	1043	1043	1043	1043	1043

* $X^{(0)}$ は予備配分フロー

表5・3 繰返し5回までの各段階での区間交通量 (台)

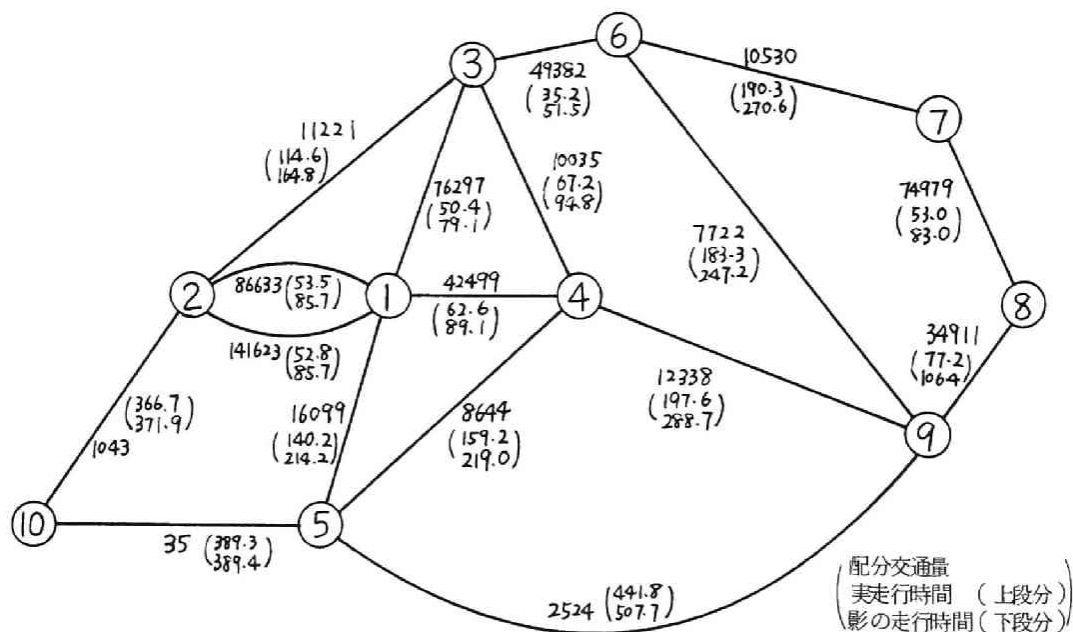


図5・4 各区間の配分交通量と実走行所要時間、影の走行時間

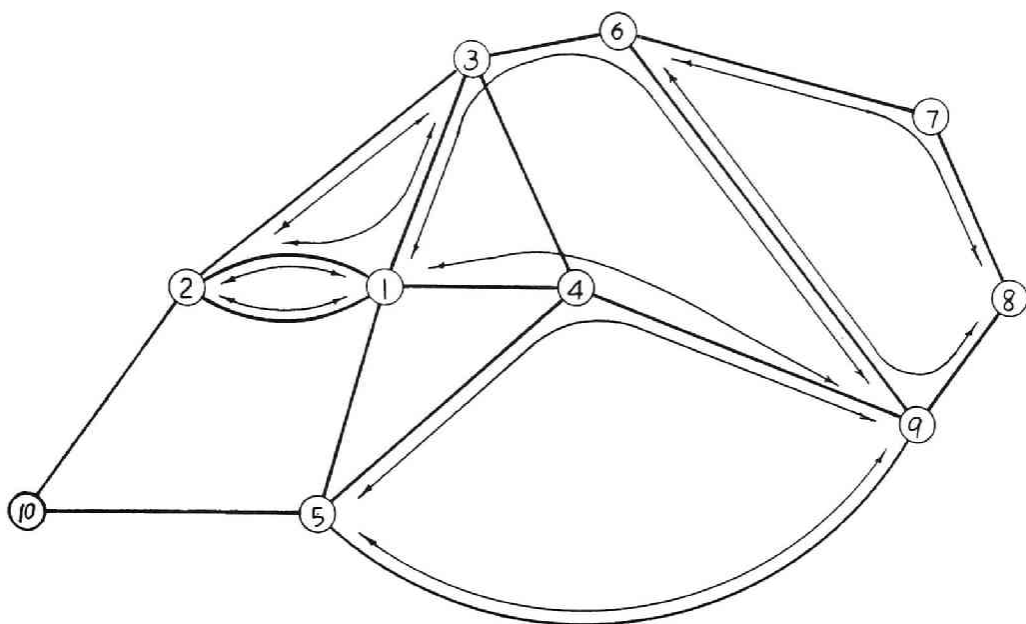


図 5・5 影の走行時間に関する等時間のパターン

表 5・4 10回の繰り返しによって求めたルートフロー

OD <i>i</i>	O	D	ルート <i>k</i>	r_k^i	x_k^i (台)	t_k^{*i} (分)	t_k^i (分)
20	3	6	1	000000100000000000	27169.00	51.51	35.24
1	1	2	1	100000000000000000	131482.77	85.67	52.85
1	1	2	2	010000000000000000	86626.23	85.67	53.52
2	1	3	1	001000000000000000	53940.00	79.10	50.39
40	7	8	1	00000000000010000	66648.00	82.97	53.00
3	1	4	1	000100000000000000	37095.00	89.12	62.56
18	3	4	1	000000010000000000	9310.00	94.79	67.20
5	1	6	1	001000100000000000	7763.00	130.61	85.63
10	2	3	1	101000000000000000	3069.86	164.77	103.23
10	2	3	2	000001000000000000	11064.14	164.77	114.58
43	8	9	1	000000000000001000	26822.00	106.35	77.21
11	2	4	1	100100000000000000	2006.05	174.80	115.41
11	2	4	2	010100000000000000	4.95	174.80	116.09
26	4	6	1	000000110000000000	602.00	146.30	102.44
13	2	6	1	101000100000000000	1042.00	216.28	138.48
4	1	5	1	000010000000000000	14187.00	214.22	140.21
41	7	9	1	00000000000011000	2958.00	189.32	130.21
12	2	5	1	100010000000000000	1111.00	299.89	193.06

OD i	O	D	ルート k	π_k^i	x_k^i (台)	t_k^{i*} (分)	t_k^i (分)
19	3	5	1	001010000000000000	396.00	293.32	190.60
25	4	5	1	000000000100000000	2354.00	218.95	159.23
29	4	9	1	000000001000000000	2403.00	288.73	197.56
29	4	9	2	000000110001000000	0.0	393.55	285.71
31	5	6	1	001010000000000000	271.00	344.83	225.84
36	6	7	1	000000000010000000	2559.00	270.63	190.26
38	6	9	1	000000000001000000	1925.00	247.25	183.27
21	3	7	1	000000100010000000	478.00	322.14	225.51
37	6	8	1	000000000010100000	139.99	353.60	243.26
37	6	8	2	000000000001010000	1105.00	353.60	260.49
23	3	9	1	000000100001000000	1152.00	298.76	218.52
8	1	9	1	000100001000000000	872.88	377.85	260.13
8	1	9	2	001000100001000000	2127.12	377.85	268.90
6	1	7	1	001000100010000000	1393.00	401.24	275.89
22	3	8	1	000000100010100000	0.00	405.11	278.50
22	3	8	2	000000100001010000	854.00	405.11	295.73
28	4	8	1	000000001000010000	284.00	395.08	274.78
16	2	9	1	100100001000000000	549.00	463.53	312.98
27	4	7	1	000000110010000000	123.00	416.93	292.70
14	2	7	1	101000100010000000	301.67	486.91	328.74
14	2	7	2	000001100010000000	157.33	486.91	340.09
7	1	8	1	001000100010100000	4345.72	484.20	328.89
7	1	8	2	000100001000010000	1902.28	484.20	337.34
15	2	8	1	101000100010100000	886.95	569.88	381.74
15	2	8	2	101000100001010000	555.83	569.88	398.96
15	2	8	3	011000100001010000	2.22	569.88	399.64
34	5	9	1	000000001100000000	5890.84	507.68	356.79
34	5	9	2	000000000000000100	2524.16	507.68	441.79
32	5	7	1	001010100010000000	134.00	615.46	416.10
33	5	8	1	001010100010100000	0.0	698.43	469.10
33	5	8	2	000000001100010000	399.00	614.03	434.00
17	2	10	1	000000000000000001	425.00	371.86	366.68
9	1	10	1	100000000000000001	480.00	457.53	419.53
35	5	10	1	00000000000000010	35.00	389.44	389.32
24	3	10	1	101000000000000001	45.00	536.63	469.91
30	4	10	1	100100000000000001	32.00	546.65	482.09
39	6	10	1	101000100000000001	12.00	588.14	505.16
45	9	10	1	100100001000000001	8.37	835.38	679.65
45	9	10	2	101000100001000000	0.63	835.38	688.43
42	7	10	1	101000100010000001	11.00	858.77	695.42
44	8	10	1	101000100010100001	0.30	941.74	748.42
44	8	10	2	100100001000010001	28.70	941.74	756.87

(t_k^{i*} は影の所要時間)

5.2 等時間原則による交通量配分におけるパスフローの推定²⁸⁾

既に 2.5 で明らかにしたように、等時間原則による交通量配分では区間交通量は一意的に定まるがパスフローは一意的には定まらない。もし区間交通量のみが必要なのであればパスフローを求める必要はないが、実際の交通計画では往々にしてパスフローを必要とすることがある。たとえば経路が常識的にみて妥当なものであるかどうかのチェック、交差点における右左折率を求める場合、高速道路のインターチェンジにおける流入交通量を求める場合などである。

パスフローを求めることは交通計画に重要なことであるが、その解の内容について詳しい検討がなされなければならない。たとえば分割配分法においては、総交通量を漸増していくというのは単に計算技術上の意味しかもたないから、求まったパスフローは合理的意味を有しない。

等時間原則による交通量配分でパスフローを一意的に求める方法がかって佐佐木によって研究された。²⁹⁾これは各トリップは起終点間の所要時間が最短となる経路を選ぶという等時間原則本来の仮定の他に、あるノードペア間で走行所要時間の等しい何本かの経路がちるとき、それらの各経路を選択する割合は、それらの経路を最短路中に含むすべての OD ペアについて等しいという仮定をおくものである。この仮定を佐佐木は配分比条件と呼んでいる。

配分比条件を数式によって表わすと次のようになる。いま、図 5.6 においてノード $n - n'$ 間における l 本の経路 $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_k, \dots, \varphi_l$ が等時間であるとしよう。このとき経路 $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_l$ を起終点間の最短路中に含む任意の OD ペア ij について、それらの各経路を流れる交通量をそれぞれ $x_{\varphi_1}^{ij}, x_{\varphi_2}^{ij}, \dots, x_{\varphi_l}^{ij}$ とすると、配分比条件は次式で表わされる。

$$\frac{x_{\varphi_1}^{ij}}{\nu_{\varphi_1}} = \frac{x_{\varphi_2}^{ij}}{\nu_{\varphi_2}} = \dots = \frac{x_{\varphi_k}^{ij}}{\nu_{\varphi_k}} = \dots = \frac{x_{\varphi_l}^{ij}}{\nu_{\varphi_l}} = \delta_{ij} \quad \dots\dots\dots (5 \cdot 11)$$

ここに $\nu_{\varphi_1}, \nu_{\varphi_2}, \dots, \nu_{\varphi_l}$ はそれぞれ経路 $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_l$ に固有の定数、 δ_{ij} はゾーンペア ij に固有の定数である。

配分比条件を導入した場合パスフローは一意的に決まることは自明であるが、配分比条件式自体が高次の連立方程式となることが飯田によって指摘されており、繰り返し収束計算によって解を求める方法が開発されている。³⁰⁾

さて、配分比条件はすべての運転者が起終点間の経路について等しく知識をもっており、同一の基準によって経路を選択する場合、つまり運転者一人一人が全く区別できない場合に実現すると思われる仮説である。いまこれを確率論的立場から眺めてみよう。

i という OD ペア間に l 本の経路があり、運転者はこれらの経路をある確率で選択するもの

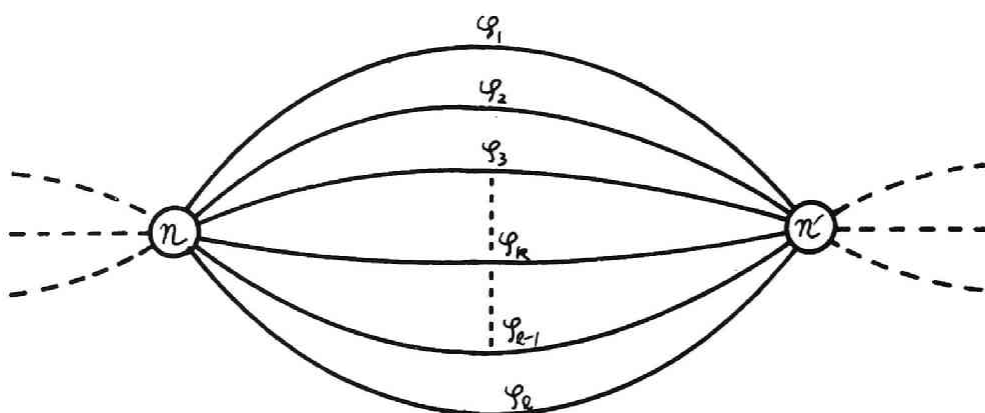


図 5・6 $n - n'$ 間の l 本の等時間経路

とする。第 k 番目の経路を選択する先験確率を p_k^i とすると、もちろん次式が成り立たなければならない。

$$\sum_k p_k^i = 1 \quad \dots\dots\dots (5 \cdot 12)$$

このとき、OD i の第 k 番目の経路にパスフロー x_k^i が流れるという状態が、すべてのゾーンペアー、すべての経路について同時的に生起する確率は、

$$P = \frac{T!}{\prod_{i,k} x_k^i!} \prod_{i,k} (p_k^i)^{x_k^i} \quad \dots\dots\dots (5 \cdot 13)$$

となる。ここに T は総トリップ数である。

もちろん区間交通量は等時間原則を満足する状態でなければならないので、

$$\sum_k x_k^i = S^i \quad \dots\dots\dots (5 \cdot 14)$$

$$\sum_i \sum_k r_{kj}^i x_k^i = X_j^* \quad \dots\dots\dots (5 \cdot 15)$$

である。ここに X_j^* は等時間原則を満足する区間交通量であり、既にその値が分っているものとする。

さて確率的に最も起こりやすいのは同時確率 P を最大にする状態である。制約条件 (5・14), (5・15) のもとで P を最大にするパスフローを求めるために P の対数をとると、

$$\log P = \log T! - \sum_{i,k} \log x_k^i + \sum_{i,k} x_k^i \log p_k^i$$

$x_k^i \gg 1$ としてスターリングの公式を用いると、

$$\begin{aligned} \log P &= T \log T - T - \sum_{i,k} x_k^i \log x_k^i + \sum_{i,k} x_k^i + \sum_{i,k} x_k^i \log p_k^i \\ &= T \log T - \sum_{i,k} x_k^i \log x_k^i + \sum_{i,k} x_k^i \log p_k^i \end{aligned}$$

となる。ラグランジェの未定乗数を $\lambda^i (i=1, 2, \dots, s)$, $\mu_j (j=1, 2, \dots, m)$ と
して次のラグランジェ関数をうる。

$$\begin{aligned} \phi &= T \log T - \sum_{i,k} x_k^i \log x_k^i + \sum_{i,k} x_k^i \log p_k^i \\ &\quad + \sum_i \lambda^i \left(\sum_k x_k^i - S^i \right) + \sum_j \mu_j \left(\sum_{i,k} r_{kj}^i x_k^i - X_j^* \right) \end{aligned}$$

ϕ を x_k^i で偏微分すると、

$$\frac{\partial \phi}{\partial x_k^i} = -\log x_k^i - 1 + \log p_k^i + \lambda^i + \sum_j \mu_j r_{kj}^i$$

$\partial \phi / \partial x_k^i = 0$ とおくと、

$$\log x_k^i = \log p_k^i + \lambda^i + \sum_j \mu_j r_{kj}^i - 1$$

よって次式をうる。

$$x_k^i = p_k^i \nu^i e^{\sum_j \mu_j r_{kj}^i} \quad \left(\begin{array}{l} i=1, 2, \dots, s \\ k=1, 2, \dots, n^i \end{array} \right) \quad \dots\dots\dots (5 \cdot 16)$$

ここに、 $\nu^i = e^{\lambda^i - 1}$

である。 x_k^i は制約条件 (5・14), (5・15) を満足しなければならないので、

$$\nu^i \sum_k p_k^i e^{\sum_j \mu_j r_{kj}^i} = S^i$$

$$\sum_i \sum_k r_{kj}^i p_k^i \nu^i e^{\sum_j \mu_j r_{kj}^i} = X_j^*$$

ここで $r_{kj}^i = 1$ または 0 であるから、

$$r_{kj}^i e^{\mu_j r_{kj}^i} = r_{kj}^i e^{\mu_j}$$

となる。よって次式をうる。

$$\nu^i = \frac{S^i}{\sum_k p_k^i e^{\sum_j \mu_j r_{kj}^i}} \quad (i=1, 2, \dots, s) \quad \dots\dots\dots (5 \cdot 17)$$

$$\mu_j = \log_e \frac{X_j^*}{\sum_i \sum_k r_{kj}^i p_k^i \nu^i e^{\sum_{l \neq j} \mu_l r_{kl}^i}} \quad (j=1, 2, \dots, m) \quad \dots\dots\dots (5 \cdot 18)$$

式 (5・16), (5・17), (5・18) を同時に満足する x_k^i が同時確率を最大にするパスフローである。これを求めるためには, ν^i, μ_j の初期値を適当に仮定して式 (5・17), (5・18) を繰返し解けばよい。

以上では先験確率を既与のものとしてきたが, これを実際に与えることは困難である。そこでここでは先験確率を経路の諸特性をパラメーターとする何らかの関数形で仮定するのではなく, 起終点間のどの経路を選択する先験確率も等しいという状態を考える。すなわちどの微視的状态も同様に起こりやすいとする。このとき,

$$p_k^i = \text{Const.}$$

より, $p_k^i \nu^i$ はゾーンペア i に固有の定数となるので, 新にこれを q^i とおく。

$$q^i = p_k^i \nu^i$$

したがって同時確率が最大となるパスフローは次のようになる。

$$x_k^i = q^i e^{\sum_j \mu_j r_{kj}^i} \quad \left(\begin{matrix} i=1, 2, \dots, s \\ k=1, 2, \dots, n_i \end{matrix} \right) \quad \dots\dots\dots (5 \cdot 19)$$

x_k^i は当然次の制約条件を満たさなければならない。

$$q^i = \frac{S^i}{\sum_k e^{\sum_j \mu_j r_{kj}^i}} \quad (i=1, 2, \dots, s) \quad \dots\dots\dots (5 \cdot 20)$$

$$\mu_j = \log_e \frac{X_j^*}{\sum_i \sum_k r_{kj}^i q^i e^{\sum_{l \neq j} \mu_l r_{kl}^i}} \quad (j=1, 2, \dots, m) \quad \dots\dots\dots (5 \cdot 21)$$

パスフローが式 (5・19) のように与えられるとき, これにより求まるパスフローはどのような特徴を有するであろうか。いまノードペア $n - n'$ 間に所要時間の等しい l 本の経路が存在

するとし、ゾーンペア- i は起終点間の最短路のうちにそれらを含むものとする。 $n-n'$ 間以外はすべて同じアークを経由し、 $n-n'$ 間のみ経路 $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_l$ に分岐する l 本の経路を考える。経路 $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_l$ を経由するパスフローをそれぞれ $x_1^i, x_2^i, \dots, x_l^i$ とすると、

$$\frac{x_1^i}{e^{\sum_{j \in \varphi_1} \mu_j}} = \frac{x_2^i}{e^{\sum_{j \in \varphi_2} \mu_j}} = \dots = \frac{x_l^i}{e^{\sum_{j \in \varphi_l} \mu_j}} = q^i e^{j \sum \varphi \mu_j} \quad (5 \cdot 22)$$

が成り立つ。 φ は $n-n'$ 間以外の経路をあらわす。

$e^{j \sum \varphi_1 \mu_j}, e^{j \sum \varphi_2 \mu_j}, \dots, e^{j \sum \varphi_l \mu_j}$ はそれぞれ経路 $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_l$ に固有の定数であってゾーンペア- i に無関係である。したがって上式は起終点間に存在するいくつかの等時間経路に対して、どの経路を選択する先験確率も等しいと考えるとき、佐佐木の配分比条件が成り立つことを示している。

第3章の計算例において計算された区間交通量に対して、配分比条件を満たすパスフローを求めてみる。計算方法は式(5・20)，(5・21)に対して μ_j の初期値を適宜仮定し、両式を繰返し収束計算させる。その結果を式(5・19)に代入してパスフローをうるのである。計算結果は表5・5，図5・7～5・8に示されている。

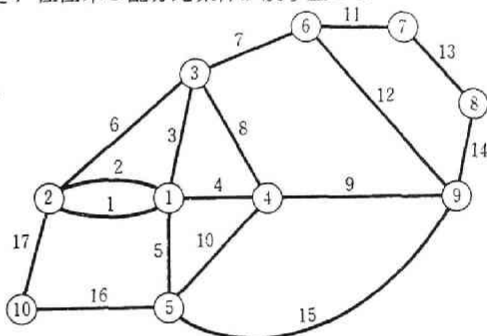


図5・7 配分対象道路網図

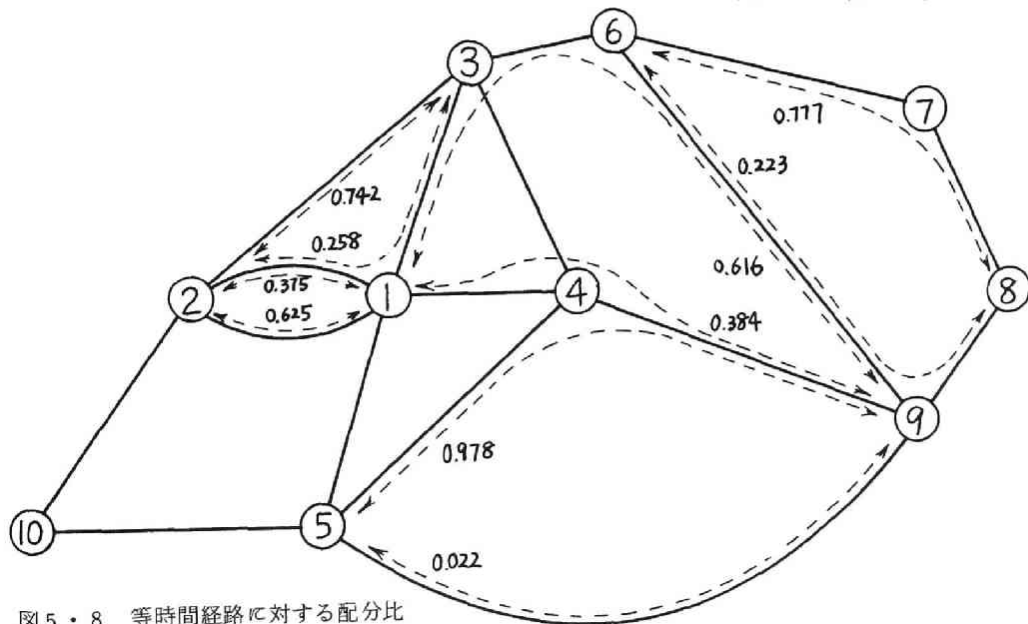


図5・8 等時間経路に対する配分比

表5・5 配分比条件を満足するルートフロー

OD <i>i</i>	O	D	ルート <i>k</i>	r_k^i	x_k^i (台)	配分比
1	1	2	1	100000000000000000	136377.5	0.625
1	1	2	2	010000000000000000	81731.5	0.375
2	1	3	1	001000000000000000	53940.0	1.000
3	1	4	1	000100000000000000	37095.0	1.000
4	1	5	1	000010000000000000	14187.1	1.000
5	1	6	1	001000100000000000	7763.0	1.000
6	1	7	1	001000100010000000	1393.0	1.000
7	1	8	1	001000100010100000	4264.4	0.683
7	1	8	2	001000100001010000	1221.8	0.196
7	1	8	3	000100001000010000	761.8	0.122
8	1	9	1	001000100001000000	1847.8	0.616
8	1	9	2	000100001000000000	1152.2	0.384
9	1	10	1	100000000000000001	300.1	0.625
9	1	10	2	010000000000000001	179.9	0.375
10	2	3	1	101000000000000000	4249.8	0.301
10	2	3	2	011000000000000000	2546.9	0.180
10	2	3	3	000001000000000000	7337.3	0.519
11	2	4	1	100100000000000000	1257.4	0.625
11	2	4	2	010100000000000000	753.6	0.375
12	2	5	1	100010000000000000	694.6	0.625
12	2	5	2	010010000000000000	416.3	0.375
13	2	6	1	101000100000000000	313.3	0.301
13	2	6	2	011000100000000000	187.8	0.180
13	2	6	3	000001100000000000	540.9	0.519
14	2	7	1	101000100010000000	138.0	0.301
14	2	7	2	011000100010000000	82.7	0.180
14	2	7	3	000001100010000000	238.3	0.519
15	2	8	1	101000100010100000	316.6	0.219
15	2	8	2	101000100001010000	90.7	0.063
15	2	8	3	100100001000010000	56.6	0.039
15	2	8	4	011000100010100000	189.7	0.131
15	2	8	5	011000100001010000	54.4	0.038
15	2	8	6	010100001000010000	33.9	0.023
15	2	8	7	000001100010100000	546.6	0.378
15	2	8	8	000001100001010000	156.6	0.108
16	2	9	1	101000100001000000	127.0	0.231

ODi	O	D	ル-トk	r_k^i	x_k^i (台)	配分比
16	2	9	2	100100001000000000	79.2	0.144
16	2	9	3	011000100001000000	76.1	0.139
16	2	9	4	010100001000000000	47.5	0.086
16	2	9	5	000001100001000000	219.3	0.399
17	2	10	1	000000000000000001	425.0	1.000
18	3	4	1	000000010000000000	9310.0	1.000
19	3	5	1	001010000000000000	396.0	1.000
20	3	6	1	000000100000000000	27169.0	1.000
21	3	7	1	000000100010000000	478.0	1.000
22	3	8	1	000000100010100000	663.8	0.777
22	3	8	2	000000100001010000	190.2	0.223
23	3	9	1	000000100001000000	1152.0	1.000
24	3	10	1	101000000000000001	13.5	0.301
24	3	10	2	011000000000000001	8.1	0.180
24	3	10	3	000001000000000001	23.4	0.519
25	4	5	1	000000000100000000	2354.0	1.000
26	4	6	1	000000110000000000	602.0	1.000
27	4	7	1	000000110010000000	123.0	1.000
28	4	8	1	000000001000010000	284.0	1.000
29	4	9	1	000000001000000000	2403.0	1.000
30	4	10	1	100100000000000001	20.0	0.625
30	4	10	2	010100000000000001	12.0	0.375
31	5	6	1	001010100000000000	271.0	1.000
32	5	7	1	001010100010000000	134.0	1.000
33	5	8	1	000000001100010000	390.1	0.978
33	5	8	2	000000000000001100	8.9	0.022
34	5	9	1	000000001100000000	8227.9	0.978
34	5	9	2	000000000000000100	187.1	0.022
35	5	10	1	000000000000000010	35.0	1.000
36	6	7	1	000000000010000000	2559.0	1.000
37	6	8	1	000000000010100000	967.7	0.777
37	6	8	2	000000000001010000	277.3	0.223
38	6	9	1	000000000001000000	1925.0	1.000
39	6	10	1	101000100000000001	3.6	0.301
39	6	10	2	011000100000000001	2.2	0.180
39	6	10	3	000001100000000001	6.2	0.519
40	7	8	1	000000000000100000	66648.0	1.000

OD <i>i</i>	O	D	ルート <i>k</i>	r_k^i	x_k^i (台)	配分比
41	7	9	1	00000000000011000	2958.0	1.000
42	7	10	1	10100010001000001	3.3	0.301
42	7	10	2	01100010001000001	2.0	0.180
42	7	10	3	00000110001000001	5.7	0.519
43	8	9	1	00000000000001000	26822.0	1.000
44	8	10	1	10100010001010001	6.4	0.219
44	8	10	2	10100010000101001	1.8	0.063
44	8	10	3	10010000100001001	1.1	0.039
44	8	10	4	01100010001010001	3.8	0.131
44	8	10	5	01100010000101001	1.1	0.038
44	8	10	6	01010000100001001	0.7	0.023
44	8	10	7	00000110001010001	11.0	0.378
44	8	10	8	00000110000101001	3.1	0.108
45	9	10	1	10010000100000001	1.3	0.144
45	9	10	2	01010000100000001	0.8	0.086
45	9	10	3	10100010000100001	2.1	0.231
45	9	10	4	01100010000100001	1.2	0.139
45	9	10	5	00000110000100001	3.6	0.399

5.3 カット法における問題点

カット法は^{31),32)} 飯田によって考え出された計算法であって、区間交通量を変数にとり、等時間条件式とカット条件式からなる連立一次方程式を解くことによって、等時間原則にしたがう配分交通量を求めようとするものである。もともと等時間原則による交通量配分では、区間交通量は一意的に定まるが、パスフロー・リンクフローは一意的には定まらない。それならパスフローあるいはリンクフローを変数にして問題を解き、その結果を各ゾーンペアについてたし合わせて区間交通量を得るという回りくどい方法を選ばず、直接に区間交通量を変数にすることができれば、変数の数が少く解も一意的に求められるのでより好ましいはずである。実際、等時間条件式は区間交通量を変数として簡潔に表わされる。しかし区間交通量を変数にとると、もう一方のOD交通量の需給関係を表わす方程式の樹立がはなはだ困難であるという点に遭遇するのである。

飯田はある種のネットワークではOD交通量の需給関係がカットセットによって表現できるという点に着目した。1例をあげよう。図5・9において、ノードペア1-2, 2-3, 3-1の間でOD交通量が流れているものとする。またこのとき矢印で示されているように、ルート2-

3 および 2-1-3 の間で等時間パターンが成立しているものとする。区間 ij の交通量を X_{ij} , 走行所要時間を $T_{ij}(X_{ij})$, ノードペア ij 間の交通量を Q_{ij} で表わすと等時間条件式は次のようになる。

$$T_{23}(X_{23}) = T_{12}(X_{12}) + T_{13}(X_{13}) \quad \cdots \cdots \cdots (5 \cdot 23)$$

3 個の区間交通量 X_{12}, X_{23}, X_{13} を求めるためには他に O D 交通量の需給関係を表わす 2 個の方程式が必要である。そこでいま 3 つのカットセット C_1, C_2 および C_3 の断面交通量について考えてみると、次のような関係式が成立していることがわかる。

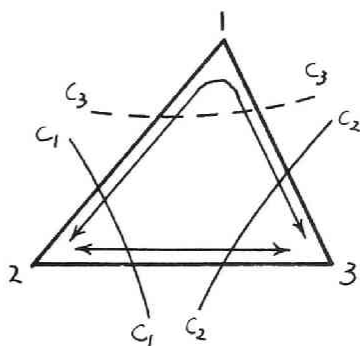


図 5・9 単一三角網における等時間経路とカット

$$\text{カット } C_1 \quad X_{12} + X_{23} = Q_{12} + Q_{23} \quad \cdots \cdots \cdots (5 \cdot 24)$$

$$\text{カット } C_2 \quad X_{23} + X_{13} = Q_{23} + Q_{13} \quad \cdots \cdots \cdots (5 \cdot 25)$$

$$\text{カット } C_3 \quad X_{12} - X_{13} = Q_{12} - Q_{13} \quad \cdots \cdots \cdots (5 \cdot 26)$$

カット C_1 および C_2 と C_3 の間では明らかに性質が異なる。カット C_1 および C_2 では、カットの両側に起終点をもつ O D 交通は唯 1 回のみそのカットを横断し、カットの同一側に起終点をもつ O D 交通はそのカットを横断しない。したがってカットに関する区間交通量の和は、その両側に起終点をもつ O D 交通量の和に等しい。それに対しカット C_3 では、カットの両側に起終点を有する O D 交通量はそのカットを唯 1 回横断するが、カットの同一側に起終点を有する O D 交通までがそのカットを 2 回以上横断しているので、もはや区間交通量の和をとることはできない。ところで 3 本の方程式 (5・24) , (5・25) , (5・26) は実は一次従属であって、区間交通量を求めるためにはこのうち 2 本の一次独立な方程式のみが必要なのである。実際、式 (5・24) , (5・25) は一次独立であるから、これと (5・23) の等時間条件式を連立して解けば区間交通量は求まる。

さてこのような方法が一般的に適用できるためには、式 (5・24) , (5・25) のような区間交通量の和で表わされるカット条件式がちょうどリンク数と等時間条件の数との差に相当するだけ存在しなければならない。飯田はその両側に起終点を有する O D 交通の最短経路を唯 1 回切るような一次独立なカットが、リンクの数と一次独立な等時間パターンの数との差に相当するだけ存在すると報告している。それはいくつかの例によって示されている。カット法が成り立つために

は、いかなるネットワークにおいても一次独立な等時間条件式とカット条件式がちょうどリンクの数だけ存在しなければならないのであるが、その理論的な証明はなされていないようである。

それでは実際にいかなるネットワークにおいても、一次独立なカット条件式が必要な数だけ、すなわちリンクの数と一次独立な等時間パターンとの数との差に相当するだけ存在するのであろうか。結論的にはそれは必ずしもいえないのである。この事実は1つの反例を示すだけで十分である。⁵⁷⁾

いま図5・10のようなネットワークを考えよう。OD交通量は $Q_{11'}=4$, $Q_{22'}=3$, $Q_{33'}=3$, 走行時間関数はすべてのリンクについて等しく、

$$T_{ij} = f(X_{ij}) \quad (\text{all } ij)$$

とする。

いま、図5・11に示すような等時間の経路パターンを考えよう。

このとき一次独立な等時間のパターンは7対であり、等時間条件式は次のようになる。

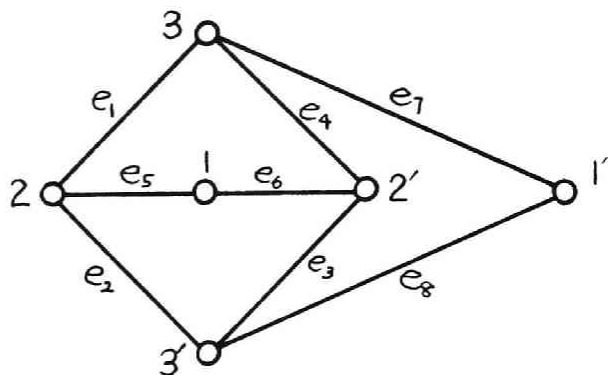


図5・10 簡単なネットワーク

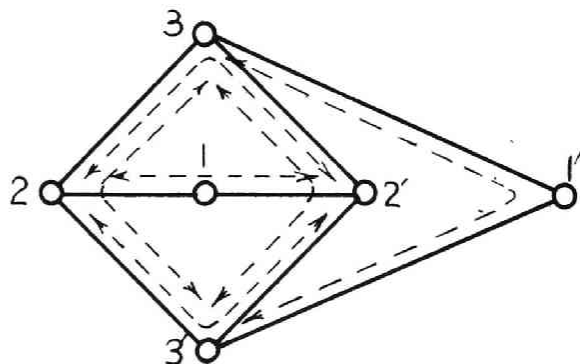
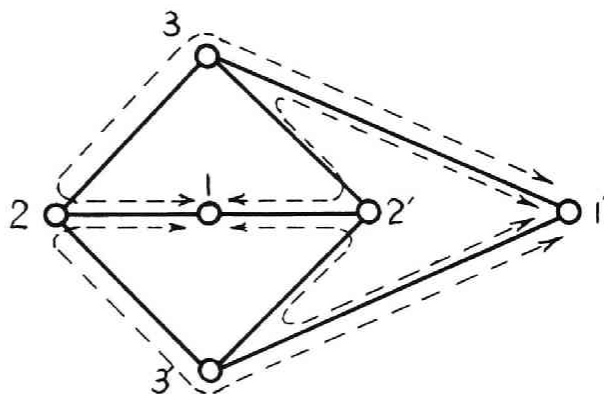


図5・11 等時間の経路パターン

$$\left. \begin{aligned} f(X_{2'3}) + f(X_{31'}) &= f(X_{2'3'}) + f(X_{3'1'}) \\ f(X_{12}) + f(X_{23}) &= f(X_{12'}) + f(X_{2'3}) \\ f(X_{12}) + f(X_{23'}) &= f(X_{12'}) + f(X_{2'3'}) \\ f(X_{12}) + f(X_{12'}) &= f(X_{23}) + f(X_{32'}) \\ f(X_{12}) + f(X_{12'}) &= f(X_{23'}) + f(X_{3'2'}) \\ f(X_{23}) + f(X_{23'}) &= f(X_{2'3}) + f(X_{2'3'}) \\ f(X_{23}) + f(X_{23'}) &= f(X_{1'3}) + f(X_{1'3'}) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (5 \cdot 27)$$

これより、

$$f(X_{12}) = f(X_{12'}) = f(X_{23}) = f(X_{23'}) = f(X_{2'3}) = f(X_{2'3'}) = f(X_{1'3}) = f(X_{1'3'}) \dots\dots\dots (5 \cdot 28)$$

をうる。

8個の区間交通量を決めるためにはあと1つの条件式が必要である。カット法によればあと1つカット条件式が存在するはずである。ところがこの場合、その両側に起終点を有するOD交通の経路を唯1回切るようないかなるガットセットも存在しない。いかなるカットを考えても経路を2回以上切ってしまうのである。

あと1つの条件式は次のように表現される。

$$X_{12} + X_{12'} + X_{23} + X_{23'} + X_{2'3} + X_{2'3'} + X_{1'3} + X_{1'3'} = 3Q_{11'} + 2Q_{22'} + 2Q_{33'} \dots (5 \cdot 29)$$

上式の意味するところは次のようである。OD交通1-1は3本のリンクを、OD交通2-2'および3-3'はそれぞれ2本のリンクを経由しなければならない。したがって全リンクについての区間交通量の和は $3Q_{11'} + 2Q_{22'} + 2Q_{33'}$ に等しくなければならない。

これはカット条件式からはいかにしても導くことができない。

式(5・28)、(5・29)より、

$$X_{12} = X_{12'} = X_{23} = X_{23'} = X_{2'3} = X_{2'3'} = X_{1'3} = X_{1'3'} = 3 \dots\dots\dots (5 \cdot 30)$$

となる。もちろん利用される経路については所要時間が皆等しく、利用されないどの経路のそれよりも小さいからこれは等時間原則にしたがう配分交通量である。

これはカット条件式の成立しない1例であるが、これより飯田が報告しているように、その両側に起終点を有するOD交通の経路を唯1回切るような一次独立なカットが、いかなるネットワ

ークにおいても必ずしも区間交通量の数と一次独立な等時間パターンの数との差だけ存在するとはいえないことがわかる。

5.4 等時間原則による交通量配分における解の存在条件

交通量配分の目的には、交通流が道路網内をどのように流れるかを把握することと、計画されている道路網が推定された交通需要を十分流しうるかどうかをチェックすることの2つがある。交通流がその路線の可能容量いっぱいには流れることは、交通流の円滑性の面からも、交通事故や騒音、排気ガス等の交通公害の面からも好ましくない。ある程度余裕をもった実用容量以下に抑えることが必要である。

これまでは起終点間の走行所要時間が最短となるような、あるいは総所要時間を最小とするような均衡解が存在すると仮定して、その均衡解を求めるための計算手法について述べてきた。しかし道路網を構成する各路線には、物理的に疏通可能なあるいは他の社会環境面から規定される容量が存在するから、配分交通量はこの容量以下でなければならない。それでは各路線で容量以下になるような均衡解が、どのような条件のもとで存在しうるのであろうか。また容量の規定された道路網にどれだけの交通量を流しうるのであろうか。ここではまず交通量配分を行う際に前提となる均衡解の存在性の問題について考察を加えてみたい。

いま道路区間 j の許容される交通量の上限値を C_j とする。このとき次式が成り立たなければならない。

$$\sum_i \sum_k r_{kj}^i x_k^i \leq C_j \quad (j = 1, 2, \dots, m) \quad \dots\dots\dots (5 \cdot 31)$$

もちろんパスフローの和はOD交通量に等しくなければならないから、

$$\sum_k x_k^i = S^i \quad (i = 1, 2, \dots, s) \quad \dots\dots\dots (5 \cdot 32)$$

$$x_k^i \geq 0 \quad \left(\begin{matrix} i = 1, 2, \dots, s \\ k = 1, 2, \dots, n^i \end{matrix} \right) \quad \dots\dots\dots (5 \cdot 33)$$

である。

式(5.31)、(5.32)、(5.33)で形成される制約領域内にある任意の1点が見つかった場合、実行可能であって均衡解は必ず存在する。しかしそのような1点が見つかることはごくまれである。

上記の制約条件を満足するようなフローが存在するかどうかはいわゆるマルチコモディティ

ーフローの容量問題に帰着する。それは値 S^i の単一フローの集まり、 $i = 1, 2, \dots, s$ が同時に枝容量の設定されたネットワーク G に存在しうるかどうかという問題である。この多重フローの存在条件を単一フローにおける最大フロー最小カット定理のようなトポロジカルな形で求める努力は多数なされてきているが、未だ未解決な部分が多い。最近翁長は多重フローの存在条件を、Ford - Fulkerson の最大フロー最小カット定理の拡張の形で示した。⁵⁸⁾ 翁長による多重フロー存在のための必要十分条件は、任意の $y_j \geq 0$ に対して、

$$\sum_j C_j y_j \geq \sum_i S^i R^i \quad \dots\dots\dots (5 \cdot 34)$$

が成り立つことである。ここに R^i は y_j をリンク j の長さとしたときのフロー i のソース、シンク間の長さである。上の式 (5・34) は枝の集合についての非負の整係数をもつ容量和を表わしており、その係数の特殊な組み合わせがカットセットを実現する。同式は翁長によって一般カット値条件 (GCV 条件) と名づけられており、与えられた OD 交通量が容量制限された道路網に流れるための必要十分条件を与える。

5.5 道路網における最大フロー

フローの存在条件と関連して、ここでは各道路区間に容量が与えられている場合、どれだけのフローを流しうるかという問題について考察を加える。道路網容量について取り扱うとき、道路交通の特徴はその地域に固有の OD 構成を有するという点であるから、この点が考慮されなければならない。

西村、三好、山村等は⁵⁹⁾ OD 構成比率を一定に保ったとき、どれだけの総交通量を流すことができるかを論じている。交通流がシングルコモディティーフローとして取り扱える特殊な場合は別として、OD 交通量分布が一般的な構成を有する場合、交通流はマルチコモディティーフローとして扱わねばならないので、単一フローにおける最大フロー最小カット定理のような簡潔な形で述べることは困難である。西村は^{60), 61), 62)} 最大フロー最小カット定理の拡張の形で道路網容量を求める方法を示した。それは後に最大フローの上限と訂正されているように必ずしも最大フローの真の値を与えるものではない。

いま単位 OD 表、すなわち OD 表の成分を総交通量で割ったものの第 ij 成分を φ_{ij} 、任意のカットセット C に対して 2 分されたノード群を X_C, \bar{X}_C 、区間 k の交通容量を C_k とすると、西村による最大容量 N は次式で与えられる。

$$N = \min_c \frac{\sum_{k \in c} C_k}{\sum_{i \in X_c, j \in X_c} \varphi_{ij}} \quad \dots\dots\dots (5 \cdot 35)$$

これが最大フローを与えるものでないことは、つぎの三重フロー問題によっても明らかである。
 図5・12において、 $e_1 \sim e_8$ までの各枝の容量はすべて2であり、3重フローの要求値は $1-1'$, $2-2'$, $3-3'$ に対してそれぞれ $\frac{4}{7}$, $\frac{2}{7}$, $\frac{1}{7}$ の比であるとする。

最小カットは S_1 , S_2 , S_3 の3つであり、それぞれ、

$$N_1 = \frac{6}{\frac{4}{7} + \frac{2}{7}} = 7$$

$$N_2 = \frac{6}{\frac{4}{7} + \frac{2}{7}} = 7$$

$$N_3 = \frac{4}{\frac{4}{7}} = 7$$

となる。

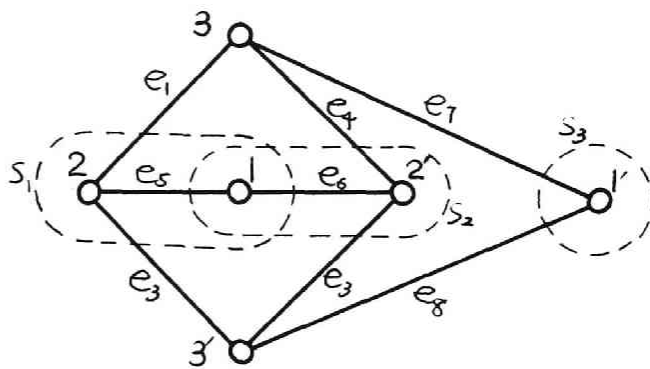
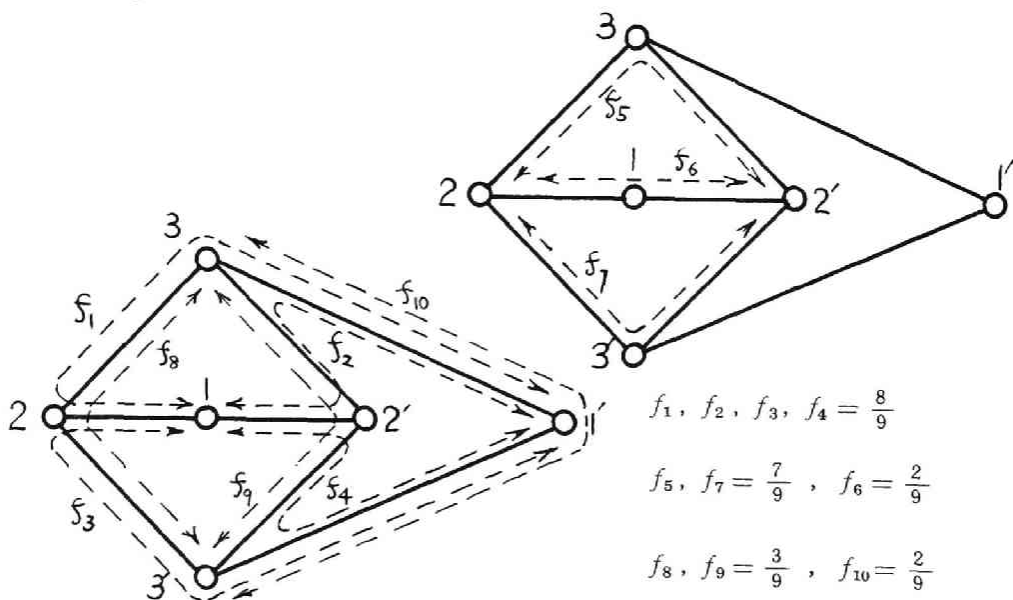


図5・12 最小カット S_1 , S_2 , S_3

しかしフロー $N=7$ はこのネットワークには絶対流れ得ない。このネットワークにおける最大フローは $\frac{56}{9}$ であり、その1例は次のようなものである。



$$f_1, f_2, f_3, f_4 = \frac{8}{9}$$

$$f_5, f_7 = \frac{7}{9}, \quad f_6 = \frac{2}{9}$$

$$f_8, f_9 = \frac{3}{9}, \quad f_{10} = \frac{2}{9}$$

図5・13 最大フローとルート

容量制限を有する道路網における最大フローは、フローの存在条件に関する翁長の GCV 条件より直ちに、

$$N = \min \frac{\sum_j C_j y_j}{\sum_i \varphi^i R^i} \quad \dots\dots\dots (5 \cdot 36)$$

と導かれる。 \min は $y_j \geq 0$ ($j = 1, 2, \dots, m$) のすべての組み合わせに対する最小値を意味する。翁長の GCV 条件 (5・34) は伊理⁸³⁾によっても簡潔な形で証明されているが、ここではルートフローを変数として線形計画法における双対定理により翁長の GCV 条件を導いておく。

いま $R^i = (r_{kj}^i)$ をルートマトリックスとすると、道路区間 j で交通量は上限値 C_j を越えることはできないから、

$$\sum_i \sum_k r_{kj}^i x_k^i \leq C_j \quad (j = 1, 2, \dots, m) \quad \dots\dots\dots (5 \cdot 37)$$

である。総トリップ数を T とすると、任意の OD ペアに関する経路交通量の和は、その OD ペアに関する交通需要量に等しいから次式が成り立つ。

$$\sum_k x_k^i = T \varphi^i \quad (i = 1, 2, \dots, s) \quad \dots\dots\dots (5 \cdot 38)$$

もちろん経路交通量および総トリップ数は非負でなければならない。したがって、

$$\begin{aligned} x_k^i &\geq 0 \\ T &\geq 0 \end{aligned} \quad \left(\begin{array}{l} i = 1, 2, \dots, s \\ k = 1, 2, \dots, n^i \end{array} \right) \quad \dots\dots\dots (5 \cdot 39)$$

道路網における最大トリップ数は、制約条件 (5・37) , (5・38) , (5・39) のもとで、目的関数

$$T \rightarrow \max$$

とする線形計画問題を解くことによって得られる。

最大トリップ数がどのように表わされるかを見るために、上記の線形計画の双対問題を考える。双対変数を r^i ($i = 1, 2, \dots, s$) , u_j ($j = 1, 2, \dots, m$) とすると、双対問題は制約条件

$$-r^i + \sum_j r_{kj}^i u_j \geq 0 \quad (i = 1, 2, \dots, s) \quad \dots\dots\dots (5 \cdot 40)$$

$$\sum_i \varphi^i r^i \geq 1 \quad \dots\dots\dots (5 \cdot 41)$$

$$u_j \geq 0 \quad (j = 1, 2, \dots, m) \quad \dots\dots\dots (5 \cdot 42)$$

のもとで、次の目的関数を最小にする問題となる。

$$\sum_j C_j u_j \rightarrow \min \quad \dots\dots\dots (5 \cdot 43)$$

ここで、

$$r_*^i = \min_k \sum_j r_{kj}^i u_j \quad \dots\dots\dots (5 \cdot 44)$$

とおくと、

$$r_*^i \geq r^i$$

となる。したがって、

$$\sum_i \varphi^i r_*^i \geq 1 \quad \dots\dots\dots (5 \cdot 45)$$

をうる。逆に r_*^i が式 (5・45) を満すとき、 r_*^i より小さな r^i を適当にとって式 (5・40) を満足させることができる。したがって制約条件 (5・40)、(5・41) は、制約条件 (5・44)、(5・45) で置きかえられる。このとき目的関数 $\sum_j C_j u_j$ の最小化は、

$$\sum_i \varphi^i r_*^i = 1$$

において実現される。なぜなら目的関数の最小点を u_j^* ($j = 1, 2, \dots, m$), r_*^{i*} とし、

$$\sum_i \varphi^i r_*^{i*} = \varepsilon > 1$$

とすると、 $u_j = u_j^* / \varepsilon$ 、

$$r_*^i = \frac{r_*^{i*}}{\varepsilon}$$

となり、このとき、

$$\sum_i \varphi^i r_*^i = \frac{\sum_i \varphi^i r_*^{i*}}{\varepsilon} = 1$$

であるから制約条件 (5・45) は満足される。ところが、

$$\sum_j C_j u_j = \frac{\sum_j C_j u_j^*}{\varepsilon} < \sum_j C_j u_j^*$$

となって u_j^* ($j=1, 2, \dots, m$), r_*^{i*} が最小点であるということに反する。したがって,

$$\sum_i \varphi^i r_*^{i*} = 1 \quad \dots\dots\dots (5 \cdot 46)$$

でなければならない。

つぎに制約条件,

$$\sum_i \varphi^i r_*^i \geq 1$$

$$u_j \geq 0 \quad (j=1, 2, \dots, m)$$

のもとで,

$$\min_{u_j \geq 0} \sum_j C_j u_j = \min_{u_j \geq 0} \frac{\sum_j C_j u_j}{\sum_i \varphi^i r_*^i} \quad \dots\dots\dots (5 \cdot 47)$$

となることを示そう。いま $\sum_j C_j u_j / \sum_i \varphi^i r_*^i$ の最小点を u_j^0 ($j=1, 2, \dots, m$), r_*^{i0} とする。明らかに $\delta > 0$ に対して δu_j^0 , δr_*^{i0} もまた $\sum_j C_j u_j / \sum_i \varphi^i r_*^i$ の最小点である。したがって δ を適当に定めることによって,

$$\sum_i \varphi^i r_*^{i0} = 1$$

とすることができる。いまもし,

$$\sum_j C_j u_j^* < \frac{\sum_j C_j u_j^0}{\sum_i \varphi^i r_*^{i0}}$$

であるなら, $u_j = u_j^*$, $r_*^i = r_*^{i*}$ とすると,

$$\frac{\sum_j C_j u_j}{\sum_i \varphi^i r_*^i} = \sum_j C_j u_j^* < \frac{\sum_j C_j u_j^0}{\sum_i \varphi^i r_*^{i0}}$$

となって u_j^0, r_{*}^{i0} が $\sum_j C_j u_j / \sum_i \varphi^i r_{*}^i$ の最小点であることに反する。

同様に,

$$\sum_j C_j u_j^* > \frac{\sum_j C_j u_j^0}{\sum_i \varphi^i r_{*}^{i0}}$$

であるなら, $u_j = u_j^0, r_{*}^i = r_{*}^{i0}$ とすれば,

$$\sum_i \varphi^i r_{*}^i = \sum_i \varphi^i r_{*}^{i0} = 1$$

であるから制約条件を満たすが,

$$\sum_j C_j u_j = \sum_j C_j u_j^0 < \sum_j C_j u_j^*$$

となって u_j^*, r_{*}^{i*} が $\sum_j C_j u_j$ の最小点であることに反する。よって,

$$\min_{u_j \geq 0} \sum_j C_j u_j = \min_{u_j \geq 0} \frac{\sum_j C_j u_j}{\sum_i \varphi^i r_{*}^i}$$

でなければならない。

双対定理より,

$$\max T = \min_{u_j \geq 0} \sum_j C_j u_j$$

であるから,

$$\max T = \min_{u_j \geq 0} \frac{\sum_j C_j u_j}{\sum_i \varphi^i r_{*}^i} \quad \dots\dots\dots (5 \cdot 48)$$

となる。ここに,

$$r_{*}^i = \min_k \sum_j r_{kj}^i u_j \quad (i = 1, 2, \dots, s) \quad \dots\dots\dots (5 \cdot 49)$$

である。

道路網における最大フローは式 (5・48) によって表わされる。前の 3 重フロー問題の例では, すべてのリンクに対して, $y_j = 1$ としたとき,

$$N = \frac{2 \times 8}{\frac{4}{7} \times 3 + \frac{2}{7} \times 2 + \frac{1}{7} \times 2} = \frac{56}{9}$$

が得られる。

しかし実際問題として最大フローを得るためには、式(5・48)の適用は困難である。1つの解法としては、制約条件(5・37)(5・38)(5・39)のもとで、目的関数 T の最大値を求める線形計画問題を解くか、あるいはその双対問題として、制約条件(5・40)(5・41)(5・42)のもとで目的関数 $\sum_j C_j u_j$ の最小値を求める線形計画問題を解く方法がある。その他にアルゴリズムを用いる方法として、飯田の方法⁶⁴⁾、西村の方法⁶¹⁾等があるが、これらはあくまでも最大フローに関する大雑把な値を与えるものであるのにすぎない。これらの方法によって得られる値が、真の値に関するどの程度の近似値を与えるものであるかはまったく不明である。

いずれにせよ、最大フローは簡単なネットワークでは求めることができるが、実際計画の対象となるような大規模道路網ではほとんど計算が困難であるということができよう。

さて上記のようなO D交通量の構成比率を一定とする方法では、O D交通量の構成比率の如何によって最大フローが変ってくる。極端には隣接するノード間に容量いっぱいのO D交通量が流れ、他のO DのO D交通量はゼロとなるようなO D分布のとき、総トリップ数は最大となる。しかしこのようなO D分布は実際上は起り得ないであろう。

O D交通量構成比率を一定として最大フローを求める方法では、多分どこかの断面でもはや交通量の流れえない状態にいたったときに最大フローが得られる。ところがこの断面以外ではさらに交通量を増加させることができる。したがって、この方法によって得られる最大フローは、どこまでの交通量を道路網に配分することができるかという限界値を表わすものであって、どれだけの交通量を道路網に流すことができるかという限界値を表わすものではない。実際にはたとえある断面で交通量が容量いっぱいにまで到達しても、他に空いた部分があればさらに交通量の増加することが見込まれる。その場合、O D交通量構成比は初めのものとは異ってくる。

第 6 章 分割配分法に関する 2, 3 の改良

6.1 分割配分法と等時間原則配分との関連

分割配分法¹¹⁾は、走行所要時間が交通量によって変化することを前提としたいわゆるフローデペンデントな配分法としては非常に実用的であって、実際の交通量配分計算ではほとんどがこの方法によっている。

分割配分法の計算手順は一般的に次のようである。

- (1) OD 表を n 等分する。
- (2) すべての起終点間の最短路を求め、 $1/n$ 分割 OD 表をこの最短路に配分する。
- (3) 所与の $Q-V$ 式を用いて、配分交通量により各道路区間の走行所要時間を修正する。
- (4) 修正された所要時間を用いて、すべての起終点間の最短路を求め、 $1/n$ 分割 OD 表を配分する。このような分割配分は n 回繰り返される。

分割配分法の解釈についてはまちまちである。分割配分法は道路網における交通流の経路選択に関するシミュレーションであるという考え方がある。運転者が起終点間の経路を選択する場合、走行所要時間が最短となる経路を選択すると考えるのは非常に合理的である。もっとも走行所要時間自体が交通量によって変わってくるので、道路網への配分は OD 交通量を何回かに分けて配分し、その都度走行所要時間を修正しなければならないわけである。

分割法では配分の初めの方の段階では、道路網に非常に少ない交通量しか流れていないときの走行所要時間に基いて経路選択がなされる。最終的に得られる配分交通量は各ステップでの配分量を重ね合わせたものであるから、初めの方の段階での配分量も含まれているわけである。しかしわれわれが求めたいのは、すべての OD 交通量が流れている状態で各運転者が起終点間の走行所要時間が最短となる経路を選択していると考えたときに、各道路区間の均衡配分量がどうなっているかということである。

これに関して、各ステップでの配分量を重ね合わせて配分交通量を得るということは、1 日の交通量の時間的変動に対応して各時間帯における交通量を別途に配分して、それらを加算し 1 日交通量とすることに相当するという見方もある。この場合、夜間の交通量の非常に少ない状態が配分の初めの方の段階に対応しているわけである。しかしそれならば、交通量の分割に関してさらに詳しい検討がなされるべきであり、現状の $1/n$ 均等分割法では必ずしも両者の対応が十分にとれているとはいえない。

それよりもむしろ分割法は等時間原則による配分の近似解法であると考えるのが合理的である。もし分割数を非常に大きくとるなら、直観的に考えて分割配分法による配分交通量は等時間原則による解に近づくであろう⁶⁵⁾ それは次のようにして確かめられる。

Jørgensen による目的関数を用いれば、等時間原則による交通量配分は次のように定式化される。

目的関数

$$J = \sum_j \int_0^{\sum_i \sum_k \tau_{kj}^i} x_k^i f_j(\xi) d\xi \rightarrow \min \quad (6.1)$$

制約条件

$$\sum_k x_k^i = S^i \quad (i=1, 2, \dots, s) \quad (6.2)$$

$$x_k^i \geq 0 \quad \left(\begin{matrix} i=1, 2, \dots, s \\ k=1, 2, \dots, n^i \end{matrix} \right) \quad (6.3)$$

ここで制約条件(6.2)の代わりに、

$$\sum_k x_k^i = \eta S^i \quad (6.4)$$

とおいて η を徐々に大きくすることを考える。 $\eta=1$ が所与の制約条件式である。またこのときの目的関数 J の最小値を $J_{\min}(\eta)$ とおく。

このとき、

$$0 < \Delta\eta \ll 1$$

に対して $J_{\min}(\eta + \Delta\eta)$ はどのように表わされるだろうか。いま $J_{\min}(\eta)$ を与える x_k^i を x_k^{i*} としよう。すると、

$$\sum_k x_k^{i*} = \eta S^i$$

$$x_k^{i*} \geq 0$$

$$J_{\min}(\eta) = \sum_j \int_0^{\sum_i \sum_k \tau_{kj}^i} x_k^{i*} f_j(\xi) d\xi$$

である。 $\eta + \Delta\eta$ に対して J の最小値を与える x_k^i を $x_k^{i*} + \Delta x_k^i$ とおくと、

$$\sum_k \Delta x_k^i = \Delta\eta S^i \quad (6.5)$$

でなければならない。ここで総交通量の増加によってパスフローの減少は起こらないということを仮定しよう。すると、

$$\Delta x_k^i \geq 0 \quad (6.6)$$

とすることができる。このとき、 $J_{\min}(\eta + \Delta\eta)$ は次のようになる。

$$\begin{aligned}
J_{\min}(\eta + \Delta\eta) &= \min \sum_j \int_0^{\sum_i \sum_k r_{kj}^i (x_k^{i*} + \Delta x_k^i)} f_j(\xi) d\xi \\
&\cong \min \left(\sum_j \int_0^{\sum_i \sum_k r_{kj}^i x_k^{i*}} f_j(\xi) d\xi + \sum_j f_j \left(\sum_i \sum_k r_{kj}^i x_k^{i*} \right) \sum_i \sum_k r_{kj}^i \Delta x_k^i \right) \\
&= J_{\min}(\eta) + \min \sum_j f_j \left(\sum_i \sum_k r_{kj}^i x_k^{i*} \right) \sum_i \sum_k r_{kj}^i \Delta x_k^i \quad (6.7)
\end{aligned}$$

式(6.7)における第2項は $\Delta\eta$ による総交通量の微小増に対する総所要時間の増分を表わしている。したがって $J_{\min}(\eta + \Delta\eta)$ を求めるためには、制約条件(6.5), (6.6)のもとでこの総所要時間の増分を最小にするような Δx_k^i の組み合わせを求めればよい。これはフローインディペンデントな立場で総所要時間の最小化を行う問題であるから、明らかに各ゾーンペアに対して所要時間最短の経路にすべての増加OD交通量を配分することによって達成される。これは分割配分法の手順そのものである。こうして η を徐々に大きくし、最後に1に等しくなったとき等時間原則にしたがう配分交通量が得られている。

したがって分割数を非常に大きくとっていくと、分割配分法による解は等時間原則による解に近づくことがいえる。ただし総交通量の増加によってパスフローの減少は起こらないということが前提になっている。もっとも実際計算上、総所要時間の増加によってパスフローを減少させなければならないということはほとんど起こらないようである。

いま図6・1に示すような単一OD, 2経路の簡単な場合を例にして分割配分法の計算手順について考察しよう。2本の経路の交通量をそれぞれ X_1, X_2 , 所要時間を $f_1(X_1), f_2(X_2)$, OD交通量を S とする。OD条件式は,

$$\left. \begin{aligned} X_1 + X_2 &= S \\ X_1, X_2 &\geq 0 \end{aligned} \right\} (6.8)$$

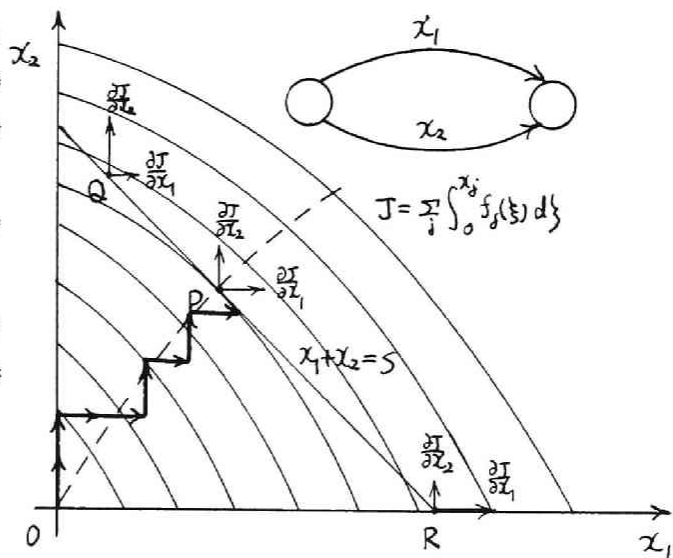


図6・1 2経路の場合の J 値のコンター

である。この制約条件のもとで目的関数

$$J = \sum_j \int_0^{X_j} \sum_i \sum_k r_{kj}^i x_k^i f_j(\xi) d\xi = \sum_{j=1}^2 \int_0^{X_j} f_j(\xi) d\xi \quad (6.9)$$

を最小にするのが等時間原則による交通量配分である。いま X_1, X_2 平面内にOD条件式および J 値の等高線を描くと図6・1のようになる。右上方にいくほど J 値は大きくなっているわけであるが、原点を通過して右上方に伸びるゆるい谷が存在する。等時間原則にしたがう交通量は、直線 $X_1 + X_2 = S$ 上における J 値の最小点 P によって与えられるが、これはこの谷と $X_1 + X_2 = S$ との交点に相当する。各経路の所要時間は J の X_1, X_2 に関する偏微係数によって与えられる。すなわち、

$$f_1(X_1) = \frac{\partial J}{\partial X_1}, \quad f_2(X_2) = \frac{\partial J}{\partial X_2} \quad (6.10)$$

分割配分法では、所要時間最小の経路に一定の増加交通量を配分するのであるから、これは X_1, X_2 の2つの方向への微係数の小さい方向に一定のステップをとっていくことに相当する。こうして原点から右上方に伸びる谷に沿って、一定の歩幅で常に2方向のうち傾斜のゆるい方向への上昇が行われ、 $X_1 + X_2 = S$ 上で P の近似点に到達するわけである。

6.2 OD交通量の分割についての検討

分割配分法では通常所与のOD交通量が n 等分される。 n としては7～10程度とすることが多い。OD交通量を n 等分することは計算技術上からは必ずしも得策ではない。交通量配分計算では全交通量を配分した最終的な結果のみが必要なのであって、交通量を漸増していく段階での中間値は必要のないものである。したがって最終的な結果への収束性が早ければ早いほどよい。この意味で n 等分したときの収束性はあまりにも緩慢すぎるように思われる。増加交通量は、最初大きく徐々に小さくしていくのがよい。

走行時間関数の面からみても、増加交通量を徐々に小さくしていく方がいいように思われる。走行時間関数は交通量に関して凸であるから、一定の交通量の増分に対して所要時間の増分は交通量の増加とともに大きくなる。したがって、分割OD表が配分されていくにしたがって所要時間の変動は次第に大きくなってしまふ。たとえば図6・1では、谷を昇るほど傾斜は急になっているから、ステップ幅を一定にとっていくと谷からの変位は次第に大きくなり、等時間原則にしたがう点への接近は困難になってくる。 P 点に近づこうとすれば進むほどにステップ幅を小さくしていかなければならない。すなわちOD表の分割刻みを段々と小さくしていかなければなら

ないわけである。

そこでいま、交通量の増分に対して所要時間の修正量が平均的には等しくなるような分割の仕方⁶⁵⁾を考える。いま走行時間関数 $T=f(X)$ について、 $X=0$ および容量 $X=C$ に対応する T 軸上の点を n 等分する点を $T_0, T_1, T_2, \dots, T_n$ とし、それらに対応する X 軸上の点を $X_0, X_1, X_2, \dots, X_n$ とする。

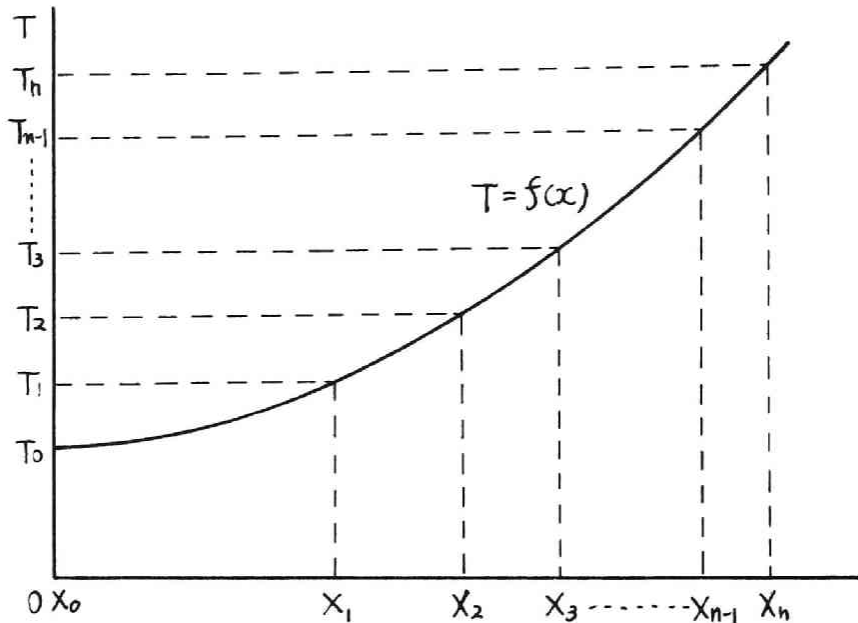


図 6・2 走行時間関数による OD 交通量の分割

ここで、 $(X_1 - X_0)/C : (X_2 - X_1)/C : (X_3 - X_2)/C : \dots : (X_n - X_{n-1})/C$ を OD 交通量の分割比とする。 $f=f(X)$ は下に凸であるから、この分割比は次第に小さくなっている。各ステップでの配分量は、この分割比に相当する分より大きくなることも小さくなることもあり、したがって所要時間の修正量も各ステップで等しくはならないが、ネットワーク全体では平均的には等しくなることが期待される。

$T=f(X)$ の逆関数を $X=f^{-1}(T)$ とすると、分割比 $\rho_1 : \rho_2 : \dots : \rho_n$ は次のようになる。

$$\begin{aligned} & \rho_1 : \rho_2 : \dots : \rho_n \\ &= \frac{1}{C} f^{-1}\left(T_0 + \frac{T_n - T_0}{n}\right) : \frac{1}{C} f^{-1}\left(T_0 + \frac{2(T_n - T_0)}{n}\right) : \dots : \frac{1}{C} f^{-1}\left(T_0 + \frac{T_n - T_0}{n}\right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&: \cdots : \frac{1}{C} f^{-1} \left(T_0 + \frac{i(T_n - T_0)}{n} \right) - \frac{1}{C} f^{-1} \left(T_0 + \frac{(i-1)(T_n - T_0)}{n} \right) \\
&: \cdots : 1 - \frac{1}{C} f^{-1} \left(T_0 + \frac{(n-1)(T_n - T_0)}{n} \right) \quad (6.11)
\end{aligned}$$

いま $f(X) = ae^{bX}$ という形の走行時間関数を考えると、

$$\begin{aligned}
&\rho_1 : \rho_2 : \cdots : \rho_n \\
&= \frac{1}{bC} \log \frac{n + e^{bc} - 1}{n} : \frac{1}{bC} \log \frac{n + 2e^{bc} - 2}{n} : \frac{1}{bC} \log \frac{n + e^{bc} - 1}{n} : \frac{1}{bC} \log \frac{n + 3e^{bc} - 3}{n} \\
&- \frac{1}{bC} \log \frac{n + 2e^{bc} - 2}{n} : \cdots : \frac{1}{bC} \log \frac{ne^{bc}}{n} - \frac{1}{bC} \log \frac{1 + (n-1)e^{bc}}{n} \\
&= \frac{1}{bC} \log \frac{n + e^{bc} - 1}{n} : \frac{1}{bC} \log \frac{n + 2e^{bc} - 2}{n + e^{bc} - 1} : \frac{1}{bC} \log \frac{n + 3e^{bc} - 3}{n + 2e^{bc} - 2} : \cdots : \frac{1}{bC} \log \frac{ne^{bc}}{1 + (n-1)e^{bc}}
\end{aligned}$$

となる。ここで $f(0) = a$, $f(C) = ae^{bc}$ であるから

$$e^{bc} = \frac{f(C)}{f(0)} = \frac{V_{\max}}{V_0}$$

である。ここに V_{\max} , V_0 はそれぞれ最大交通量時の走行速度、ゼロフロー時の走行速度である。

いま, $n=10$, $e^{bc}=2$ とすると、

$$\begin{aligned}
&\rho_1 : \rho_2 : \cdots : \rho_n \\
&= \frac{1}{\log 2} (\log 11 - \log 10) : \frac{1}{\log 2} (\log 12 - \log 11) : \cdots : \frac{1}{\log 2} (\log 20 - \log 19) \\
&= 0.137 : 0.126 : 0.115 : 0.107 : 0.100 : 0.093 : 0.087 : 0.082 : 0.078 : 0.074
\end{aligned}$$

また, $n=10$, $e^{bc}=10$ とすると、

$$\begin{aligned}
&\rho_1 : \rho_2 : \cdots : \rho_n \\
&= \frac{1}{\log 10} (\log 19 - \log 10) : \frac{1}{\log 10} (\log 28 - \log 19) : \cdots : \frac{1}{\log 10} (\log 100 - \log 91) \\
&= 0.279 : 0.168 : 0.121 : 0.095 : 0.078 : 0.066 : 0.057 : 0.050 : 0.045 : 0.041
\end{aligned}$$

となる。

6.3 ネットワークの分割による経路探索の効率化

一般に交通量配分計算において、最も多くの計算量を必要とするのは最短経路樹の作成である。ネットワークにおける最短経路を求める方法としては、Dantzigの方法、Fordの方法⁶⁶⁾をはじめ、今まで数十にもおよぶ方法が開発されている。そのうちで、1点から他のすべての点にいたる最短路を求める最も計算量の少ない効率的な方法はDIJKSTRA法⁶⁷⁾であることが理論的に確かめられている。⁶⁸⁾

DIJKSTRA法による最短経路長を求める手順は次のようである。いま d_{ij} をノード i をノード j につなぐリンクの長さ($d_{ij} \geq 0$)とする。そのようなリンクがないときには $d_{ij} = \infty$ とし、また $d_{ii} = 0$ とする。

- 1) 出発点1に temporary label $p_1 = 0$ を与え、他のすべての点 i に temporary label $p_i = \infty$ を与える。
- 2) 最小の temporary label をもつ点 i_0 を探し、 i_0 の temporary label p_{i_0} を値はそのままに保ちながら permanent label に変更する。

- 3) temporary label を有するすべての点 j に対して、その値を

$$p_j = \min_{i_0} (p_j, p_{i_0} + d_{i_0, j})$$

によって更新する。

- 4) すべての点が permanent label を有するようになったら終り、さもなければ2)にもどる。

各ノードの permanent label が出発点からの距離を与える。最短経路はこの手順にほんの少しのステップを追加することによって得られる。

一般に最短路を求める際の計算量は、ノード数を n とすると n^3 のオーダーで増加する。ノード数が2倍になれば8倍、10倍になれば計算量は1000倍にもなるわけである。実際の交通量配分計算ではノード数が数百というような大規模ネットワークを扱わねばならない。したがっていかに効果的な最短経路探索のアルゴリズムを採用するかによって、計算量ひいては計算費用に大きく影響してくる。また計算機の記憶容量の面からみると、計算に必要な記憶容量は n^2 のオーダーで増加する。したがって大規模ネットワークになると記憶容量の面からも制約をうけ、最短経路探索が不可能となる場合が生じてくる。

そこで何らかの方法によってネットワークを分割して最短経路探索を行うことができれば、計算量および必要な記憶容量が大幅に減少するはずである。ここでは実際計算における分割配分法の改良として、ネットワークの分割による最短経路探索の効率化について述べる。⁶⁹⁾

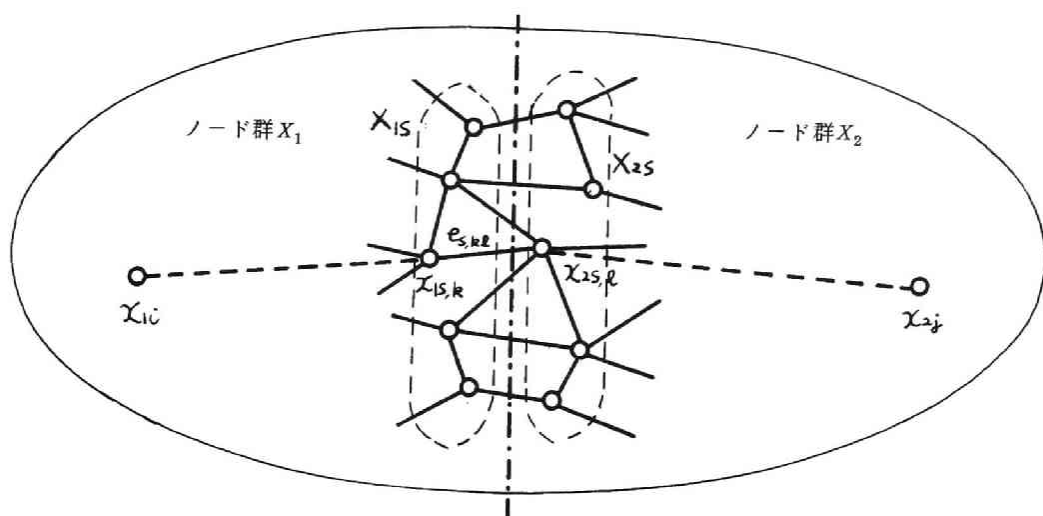


図 6・3 ネットワークの 2 分割の例

まず簡単のためにネットワークを 2 分割する場合を例にしよう。図に示すように適当な分割によって、ネットワークはノード群 X_1 とノード群 X_2 の 2 つのノード群に分けられる。このうちリンクの両端点が一方はノード群 X_1 に他方はノード群 X_2 に属するようなリンクの集合を E_s 、 E_s の端点の集合を X_s 、そのうち X_1 に属する部分を X_{1s} 、 X_2 に属する部分を X_{2s} とする。

ここで前提としてノード群 X_1 および X_2 中の任意のノード間の最短路は、それぞれの分割ネットワーク中に存在するものとしておく。いまノード群 X_1 に属する任意のノードから X_1 の任意のノードにいたる最短路が求まっているものとする。同様に X_2 に属する任意のノードから X_2 の任意のノードにいたる最短路も求まっているとする。

ノード x_i 、 x_j 間の最短路長を $r_{\min}(x_i, x_j)$ 、リンク e_{ij} の長さを $r(e_{ij})$ とすると、ノード群 X_1 に属する任意のノード x_{1j} からノード群 X_2 に属する任意のノード x_{2j} にいたる最短路長は、

$$\begin{aligned} r_{\min}(x_{1i}, x_{2j}) &= \min_{k, \dots, l} \{ r_{\min}(x_{1i}, x_{1s, k}) + r(e_{s, kl}) + r_{\min}(x_{2s, l}, x_{2j}) \} \\ &= \min_l \{ r_{\min}(x_{1s}, x_{2s, l}) + r_{\min}(x_{2s, l}, x_{2j}) \} \quad (6 \cdot 12) \end{aligned}$$

となる。なぜならノード x_{1i} 、 x_{2j} 間の任意の経路を $\varphi = x_{1i}, \dots, x_{1s, m}, x_{2s, n}, \dots, x_{2j}$ 、その長さを $r_\varphi(x_{1i}, x_{2j})$ とすると、

$$\begin{aligned} r_\varphi(x_{1i}, x_{2j}) &\geq r_{\min}(x_{1i}, x_{1s, m}) + r(e_{s, mn}) + r_{\min}(x_{2s, n}, x_{2j}) \\ &\geq r_{\min}(x_{1s}, x_{2j}) \end{aligned}$$

となるからである。

したがってノード群 X_1 に属する任意のノードからノード群 X_2 に属する任意のノードにいたる最短経路は、ノード群 X_1 と X_{1s} との間の最短経路長およびノード群 X_2 と X_{2s} との間の最短経路長および E_s のリンク長の3者により求まることになる。結局すべてのノードペア間の最短経路を求めるには、それぞれ分割されたネットワーク内における任意のノードペア間の最短経路を求め、次にこれらの中継としてノード群にまたがるノードペア間の最短経路を求めればよい。

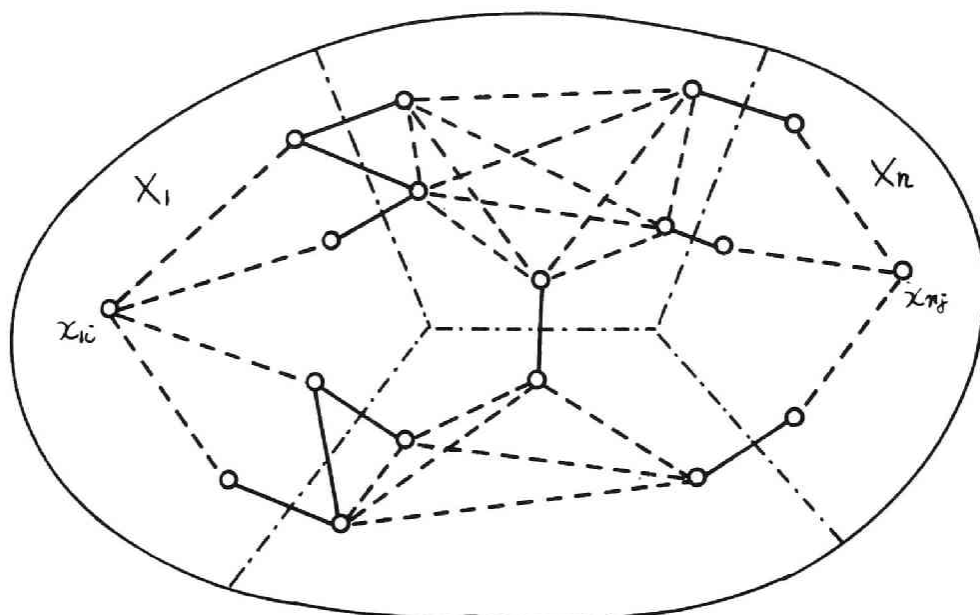


図 6・4 n 分割の場合の仮想ネットワーク

分割数が一般に n となったときにも同様に各分割グラフにおける最短経路を利用してすべてのノードペア間の最短経路を求めることができる。いま前提としてそれぞれの分割ネットワークにおける任意のノード間の最短経路はそれぞれの分割ネットワーク中に存在するとしておく。

図においてノード群 X_1 に属する任意のノード x_{1i} からノード群 X_n に属する任意のノード x_{nj} にいたる最短経路を求める。ただし各分割グラフにおける任意のノードペア間の最短経路は求まっているとする。

ノード x_{1i} からノード群 X_1 の境界ノードへの最短経路は求まっているから、ノード x_{1i} とこれらの境界ノードとをその間の最短経路長を長さとする仮想リンクによって結ぶ。同様にノード x_{nj} とノード群 X_n に属する境界ノードとをその間の最短経路長を長さとする仮想リンクによって結ぶ。

ノード群 X_2 からノード群 X_{n-1} についても各分割グラフでの最短路は求まっているから、各分割グラフ内における境界ノード間の最短路長をその長さとする仮想リンクによって結ぶ。仮想リンクはその間の最短路を1つのリンクによって表現したものである。

つぎにノード x_{1i} 、 x_{nj} およびすべての境界ノード、境界リンク、すべての仮想リンクよりなるネットワークを考える。もとのネットワークにおけるノード x_{1i} 、 x_{nj} 間の最短路は、この仮想ネットワークにおけるノード x_{1i} 、 x_{nj} 間の最短路を求めることによって得られる。

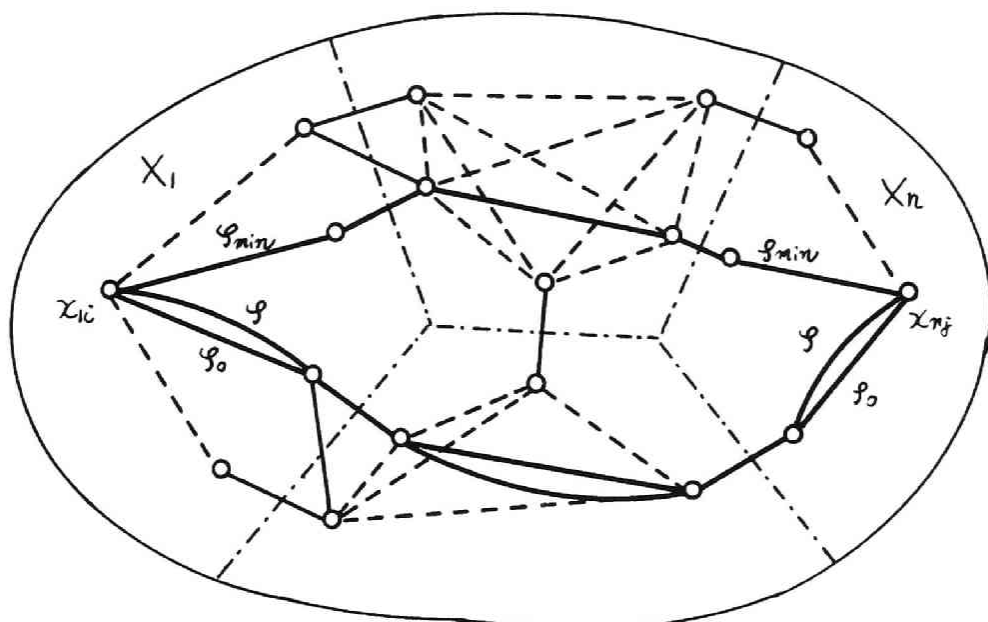


図 6・5 経路 φ 、 φ_0 、 φ_{\min}

いまこの仮想ネットワークにおけるノード x_{1i} 、 x_{nj} 間の最短路を φ_{\min} 、ノード x_{1i} 、 x_{nj} 間の任意の経路を φ 、 φ の起点、終点と境界ノードとの間および境界ノード間を最短路で置き換えたものを φ_0 、その長さをそれぞれ $\tau(\varphi_{\min})$ 、 $\tau(\varphi)$ 、 $\tau(\varphi_0)$ とすると明らかに

$$\tau(\varphi) \geq \tau(\varphi_0) \geq \tau(\varphi_{\min})$$

が成り立つ。

よってノード x_{1i} 、 x_{nj} 間の最短路長は $\tau(\varphi_{\min})$ に等しく、その最短路は経路 φ_{\min} に含まれる仮想リンクをもとのリンクに分解することによって得られる。

実際の配分計算では任意のノードペア間の最短路よりもむしろある1点から他のすべての点にいたる最短経路樹の方が必要となる。ネットワークの分割によって最短経路樹をうるには次の

ようにすればよい。

いま各分割ネットワークにおいて、境界ノード間の最短路は求まっているものとする。また最短経路樹の起点を x_{1i} とする。ここで分割ネットワークにおいては起点 x_{1i} と境界ノードを、他の分割ネットワークにおいては境界ノード相互間をその最短路長を長さとする仮想リンクによって結ぶ。つぎにこの仮想ネットワークにおいて x_{1i} を起点として他のすべての点にいたる最短路長をDIJKSTRA法によって求める。

この仮想ネットワークにおける各ノードのパーマントラベルは起点からの最短路長をあらわしている。そこで次に各分割ネットワークにもどり、境界ノードの起点からの最短路長をパーマントラベルとして同じくDIJKSTRA法により起点からの最短路長を求める。最後にリンクの両端のラベル値の差がリンク長に等しいようなリンクを拾っていくと最短経路樹ができあがる。

ネットワーク分割による最短経路樹作成の計算例として、図6・6に示すようなノード数33、リンク数68のネットワークでノード5を起点として最短経路樹を作成する。図6・7に各リンクのリンク長を示している。

いま対象とするネットワークを図6・8に示すように4つの部分 N_1, N_2, N_3, N_4 に分割する。境界ノードと境界リンク、仮想リンクからなる仮想ネットワークは図6・10に示すようになる。ノード数は16、リンク数は36であり、ノード数、リンク数ともに原ネットワークの約 $1/2$ に減少している。各分割ネットワークにおける最短路探索により求められた仮想リンク長は図6・11に示すとおりで、これにより仮想ネットワークで最短経路樹を作成したものが図6・12である。図6・13は仮想ネットワークにおける最短経路樹を原ネットワークに投影したものである。各分割ネットワークで仮想ネットワークにおける最短経路樹から残りのノードへの最短路を付加すると図6・14に示すようになる。これより図6・15に示すようなノード5を起点とする最短経路樹が得られる。

すべてのノードペア間の最短路を求めようとするとき、すなわちすべてのノードを起点として最短経路樹を作成しようとするとき、各分割ネットワークにおける境界ノード間の最短路は共通に用いることができるので、計算の主要部分は仮想ネットワークにおける最短経路樹作成になる。この場合、仮想ネットワークにおけるノード数は原ネットワークよりも減少しているから、計算量はかなり減少させることができる。したがってネットワーク分割は、そのネットワークの形状によってどのように分割するかが非常に重要になってくる。

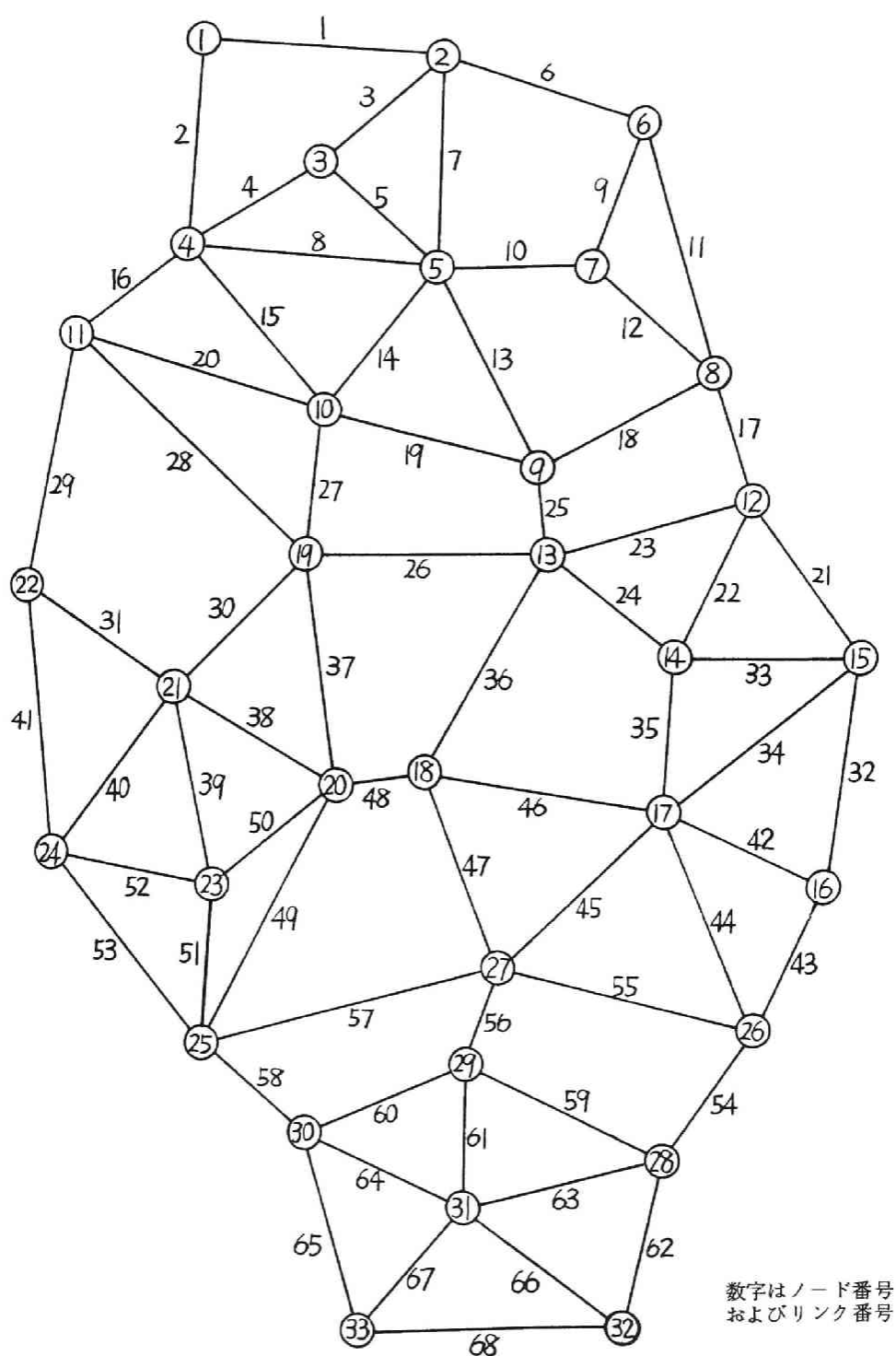


図 6・6 最短経路樹作成のためのネットワーク

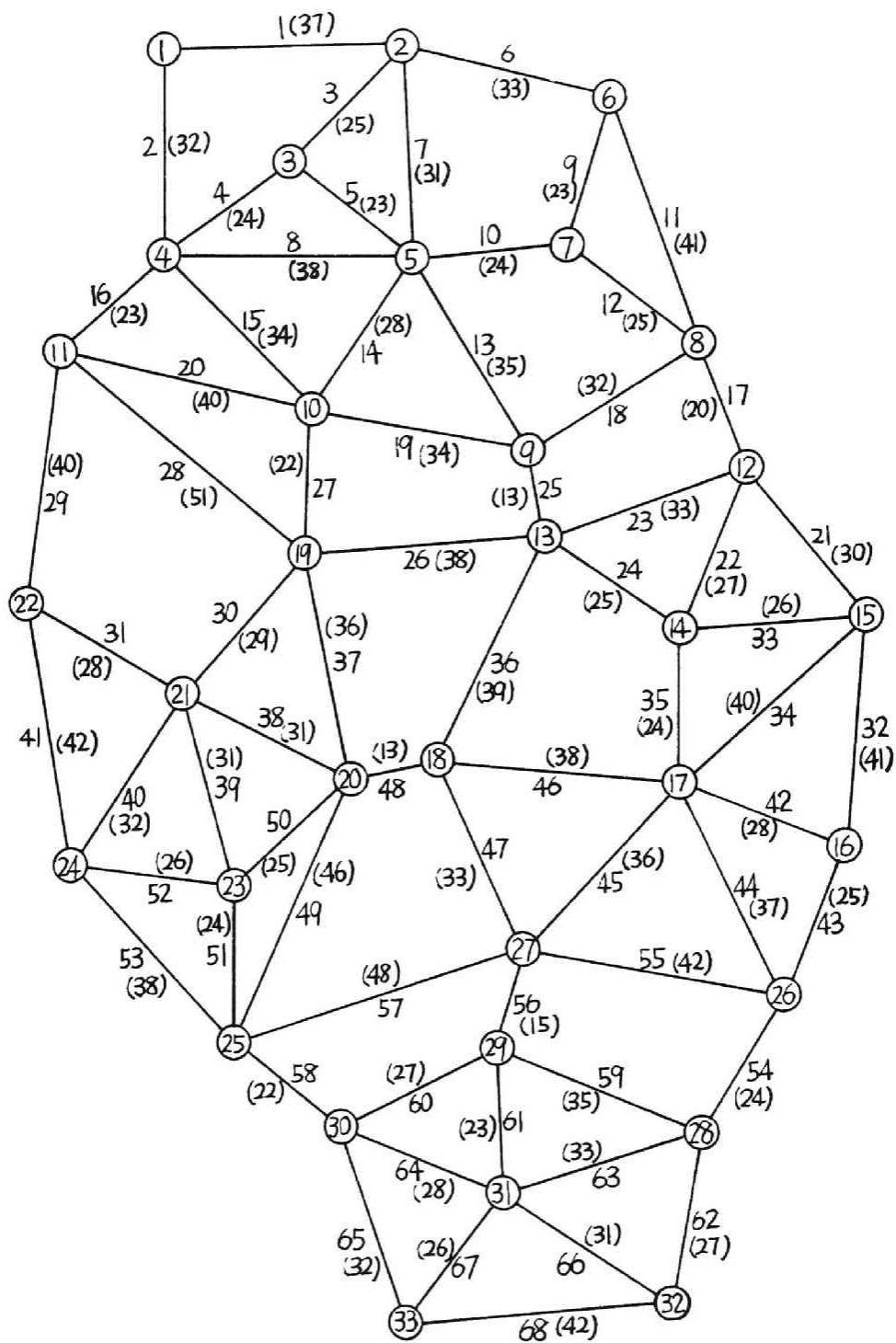


図 6・7 ネットワーク中のリンク長 () 内

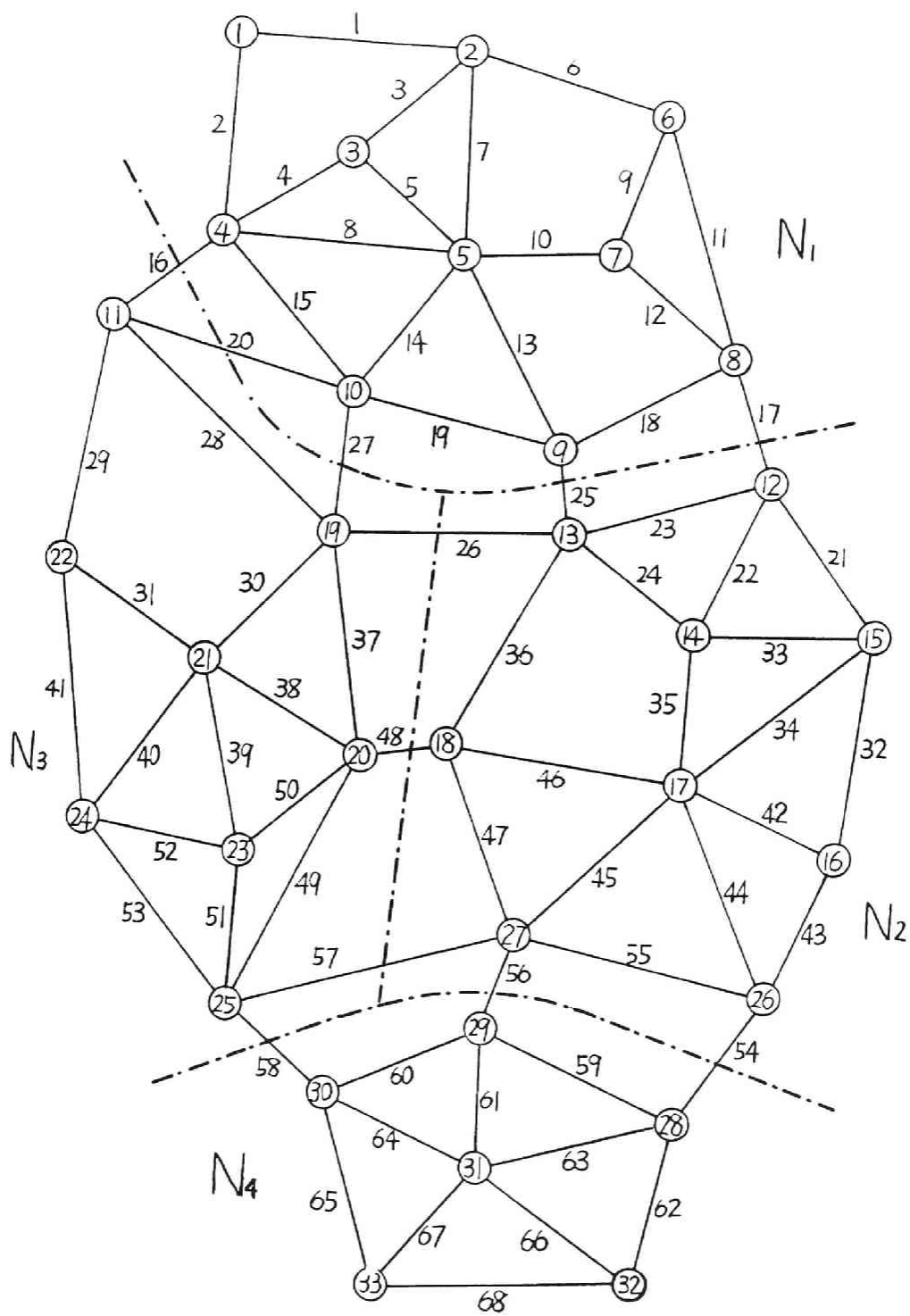


図 6・8 ネットワーク分割図

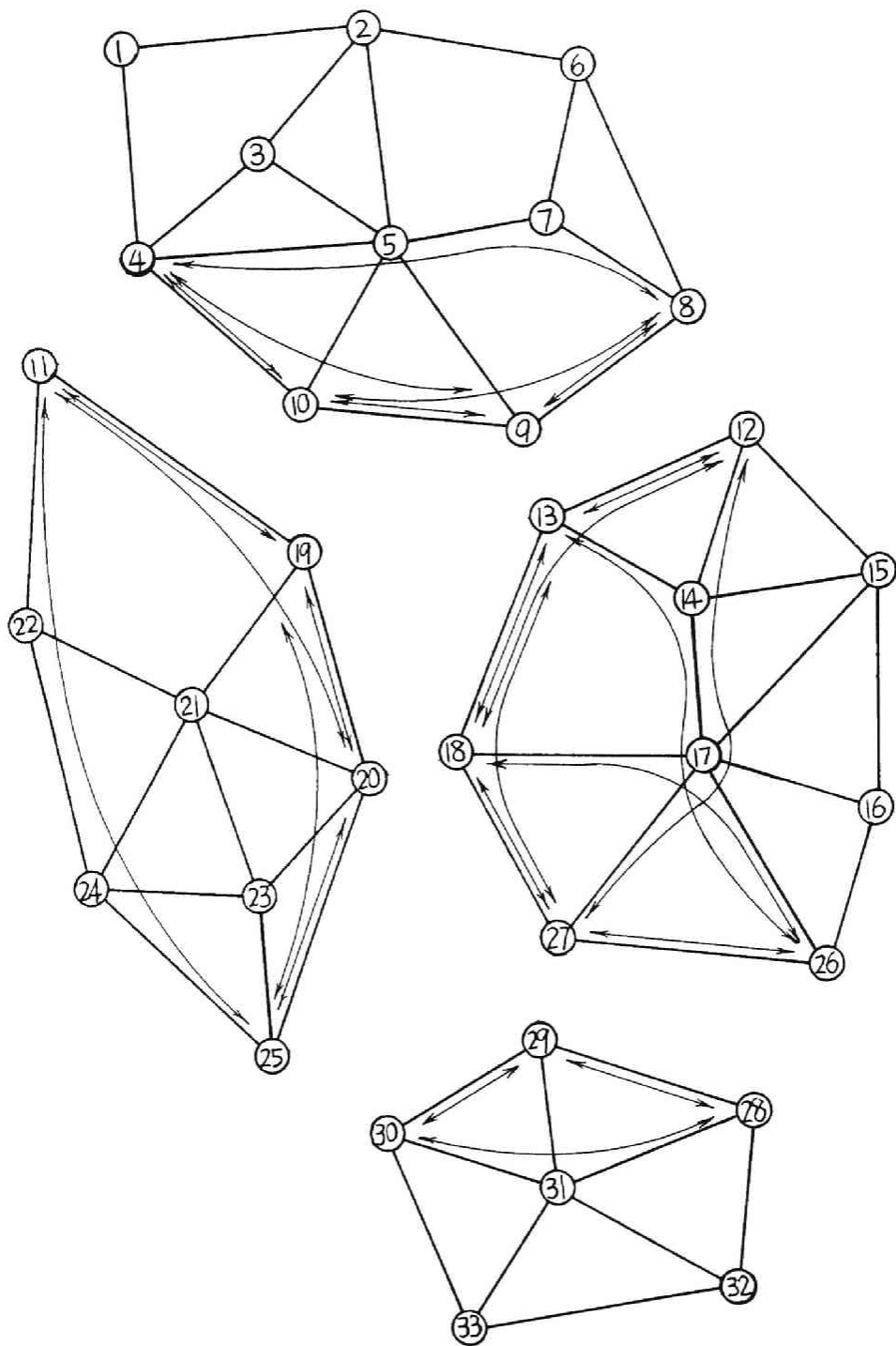
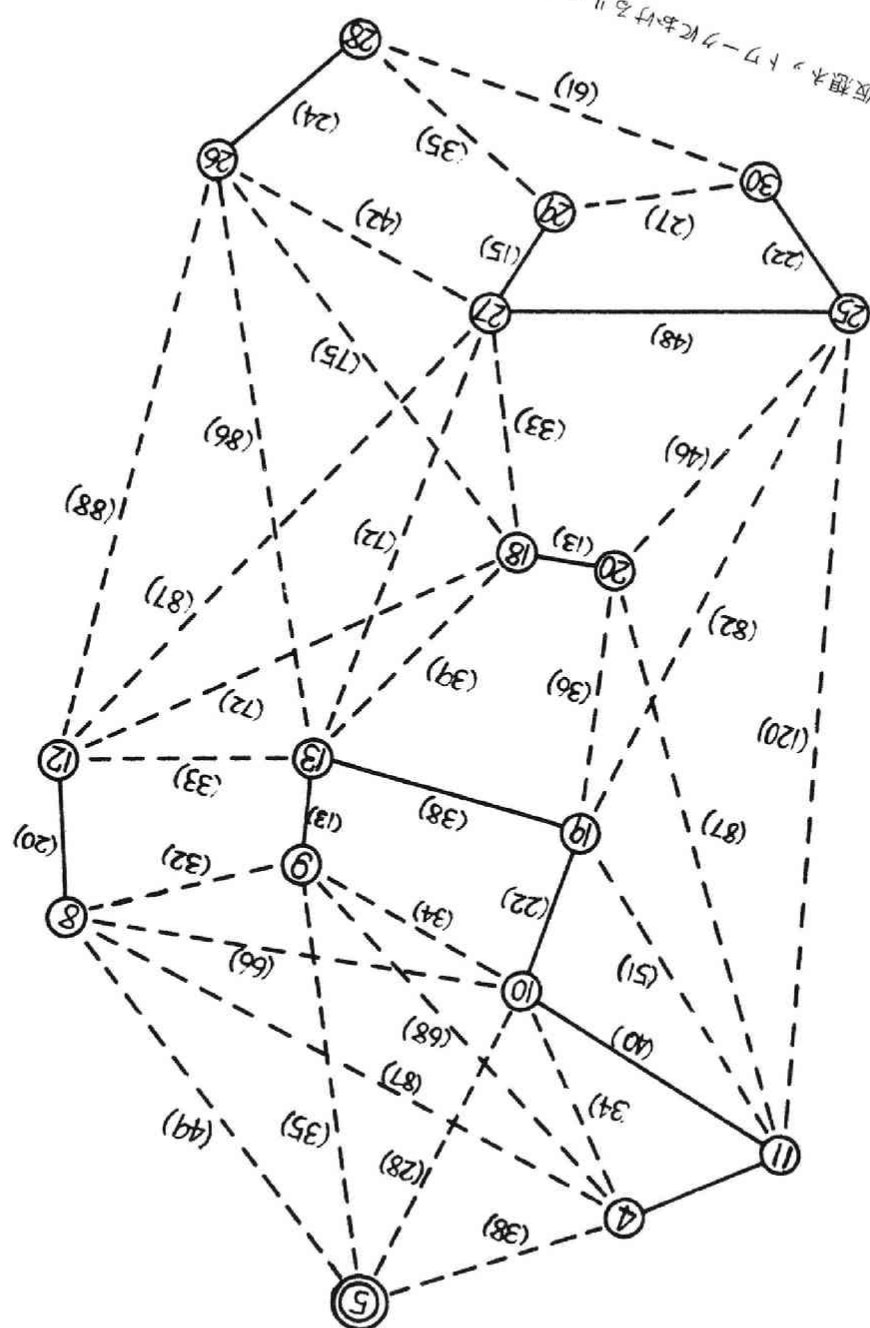


図 6・9 分割ネットワークにおける境界ノード間の最短路





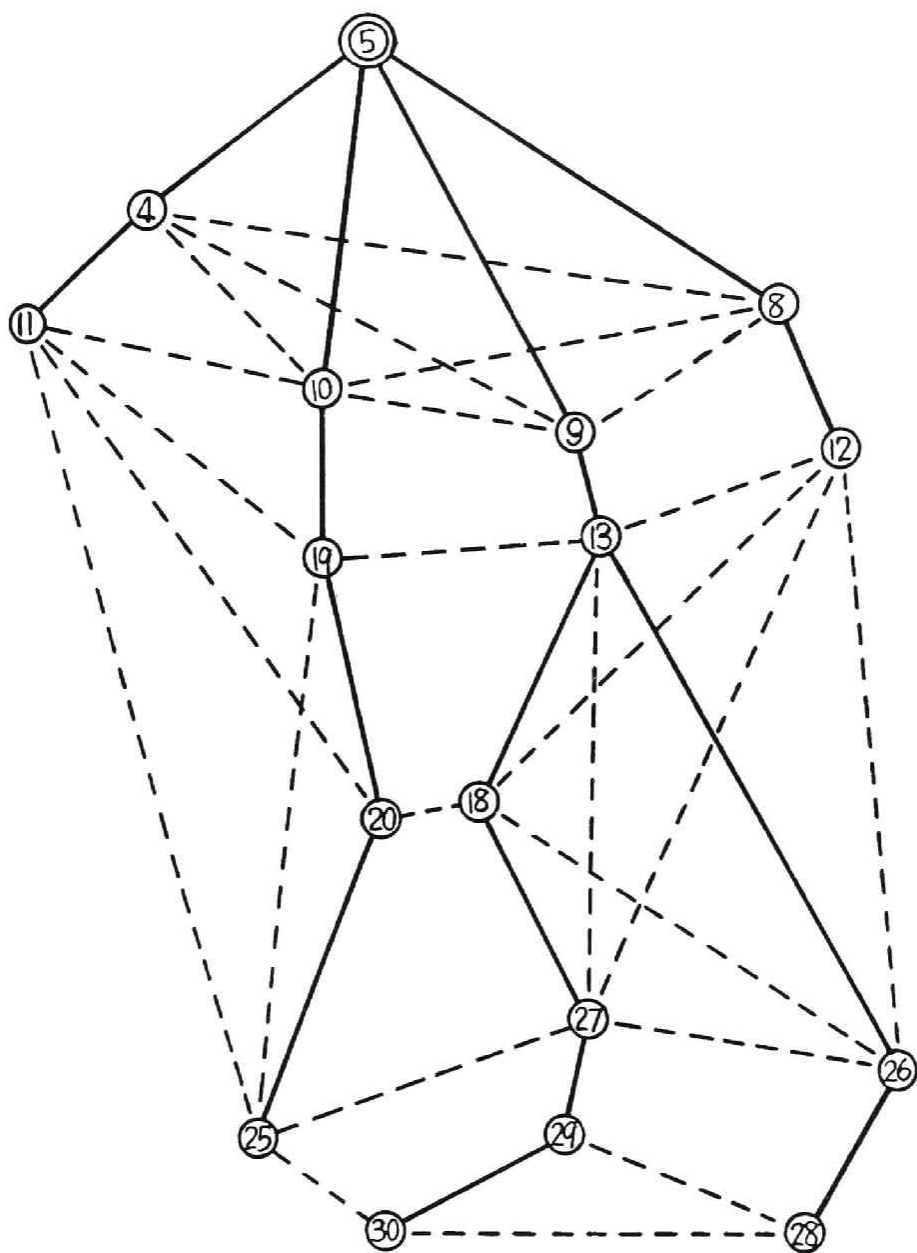


図 6・12 仮想ネットワークにおける最短経路樹

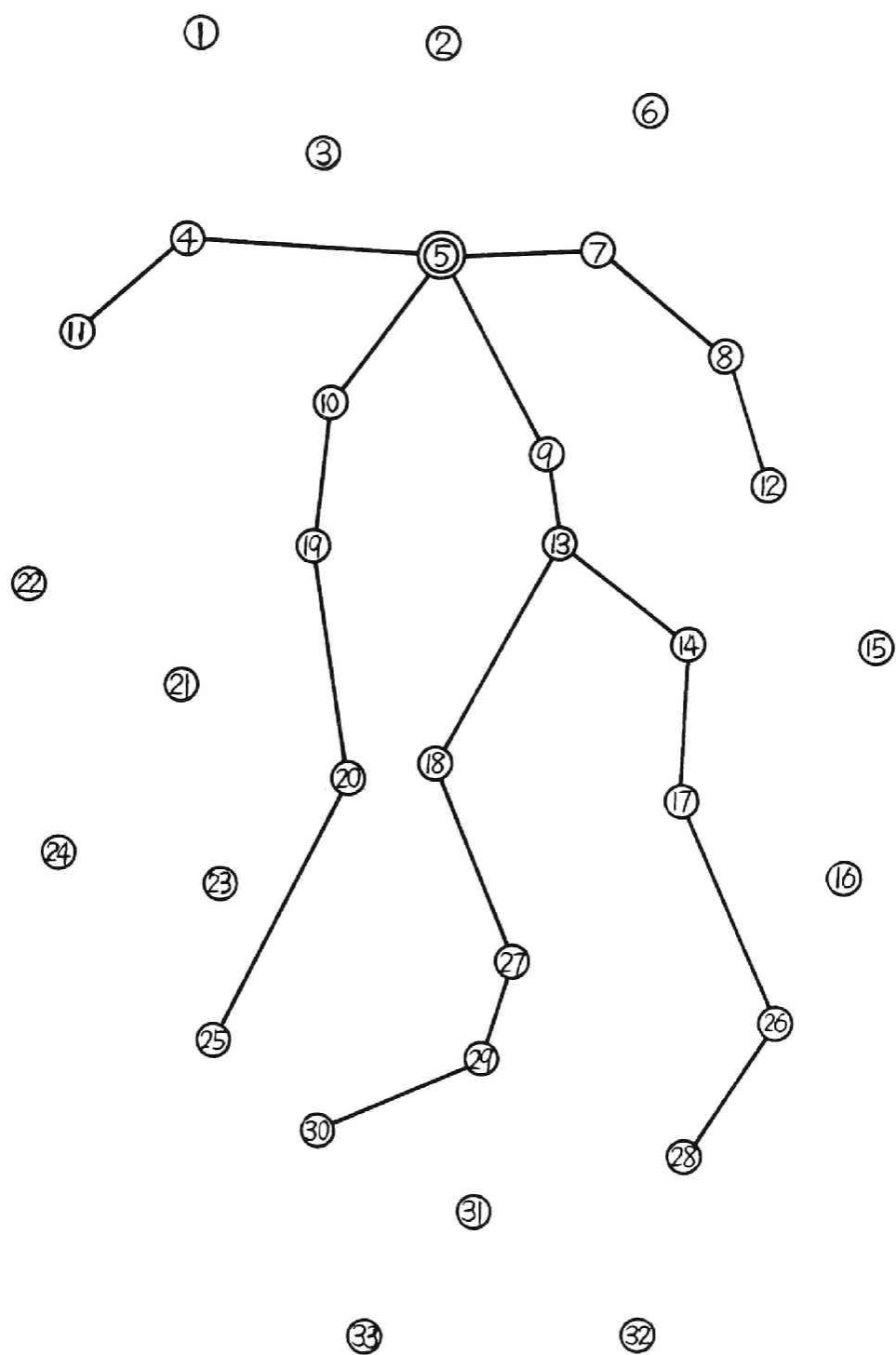


図 6 ・ 13 仮想ネットワークにおける最短経路樹の原ネットワークへの投影

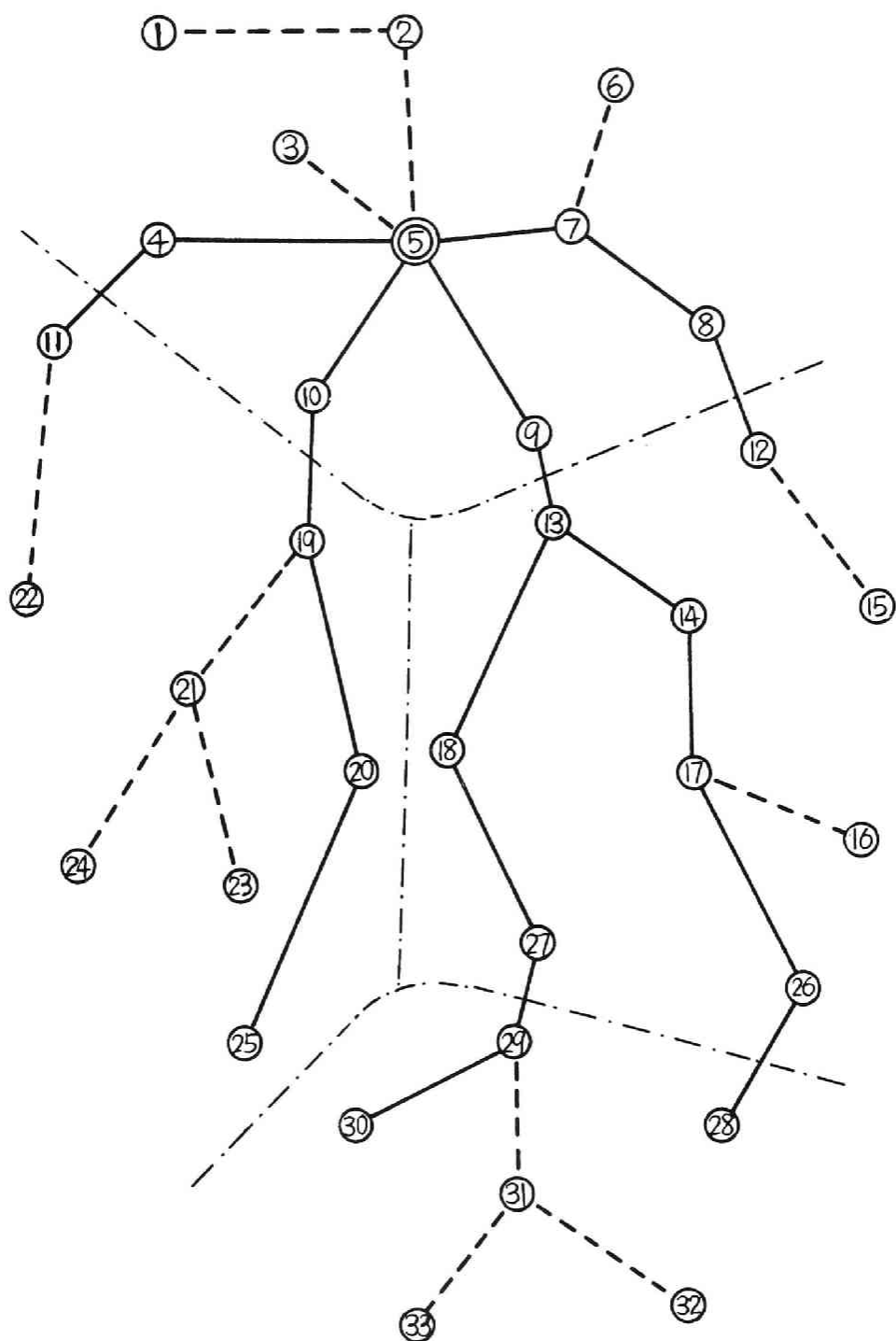


図 6・14 分割ネットワークにおける最短経路樹へのリンクの付加

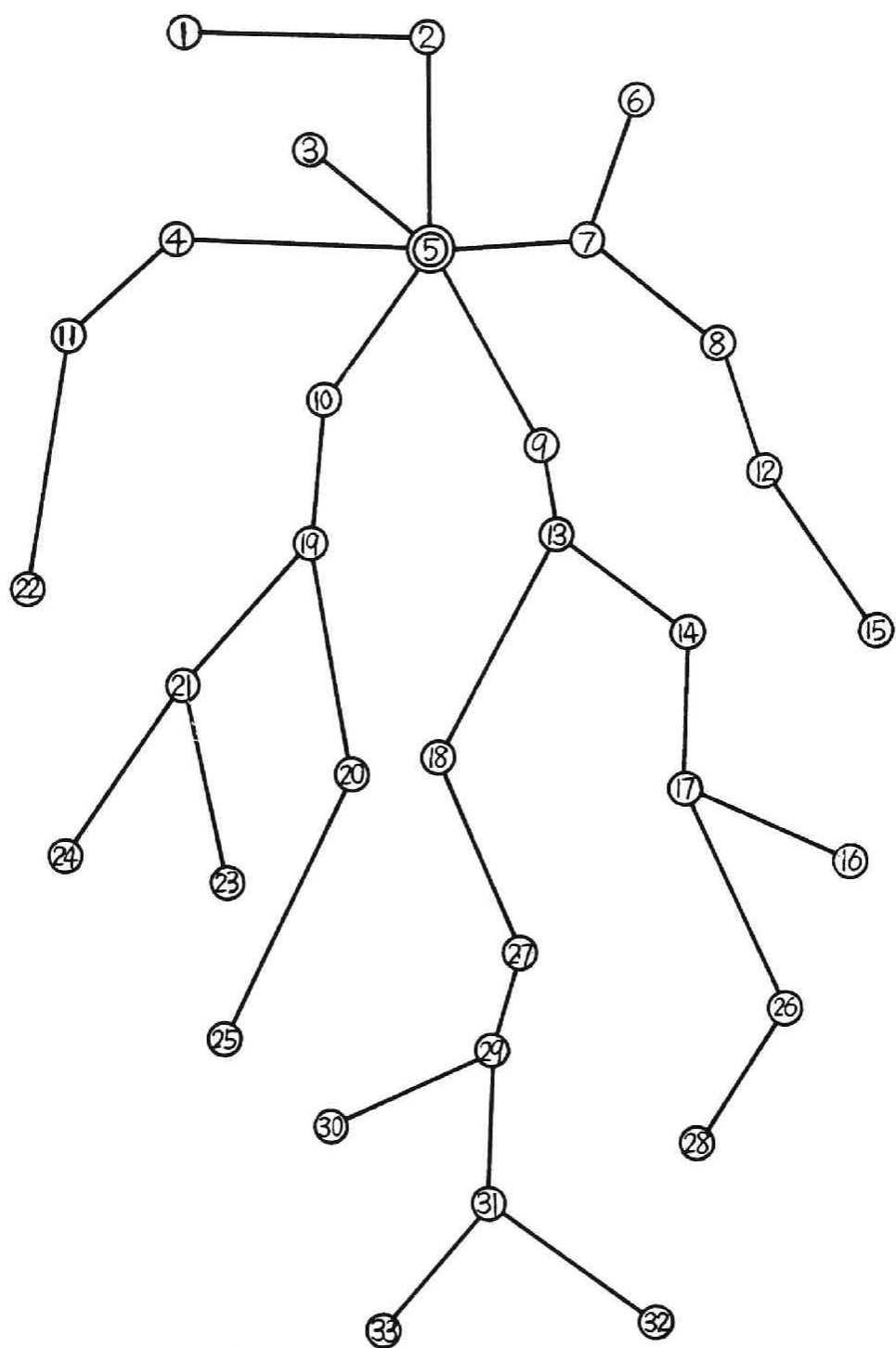


図 6 · 15 ノード 5 を起点とする最短経路樹

第7章 結 論

これまで等時間原則による交通量配分の計算法を中心として、道路網計画に関連するその他のいくつかの問題についても触れてきた。ここで本研究をとりまとめ、成果を述べると次のようになる。

第1章では本研究の意義と目的および従来の交通量配分理論の概要を述べ、本研究の概要を説明した。

第2章では等時間原則交通量配分における基本的事項について述べている。交通量配分はネットワーク理論におけるマルチコモディティフローの問題であるから、取り扱いが非常に複雑になる。交通量配分では通常パスフローまたはリンクフローが変数とされるが、本研究ではパスフローを変数とした計算法の開発を行っている。その理由はリンクフローの場合に比べて変数の数が著しく少くなること、中間ノードでのフローの連続条件式が不要となるため制約条件式の数が少くなり解析が容易になるためである。その反面経路探索というやっかいな問題を抱えこむことになるが、これには最短経路探索という有力な手段が存在する。パスフローを変数にすると、等時間原則配分はOD条件式、フローの非負条件式のもとでJørgensenによる目的関数を最小化する問題になる。この目的関数は電気回路網理論や構造解析理論におけるポテンシャルエネルギーに相当するものである。この目的関数は道路区間交通量に対しては真に凸となるが、パスフローに関しては凸ではあるが真に凸ではない。このことは等時間原則による配分は、道路区間交通量に対しては解は一意的に定まるが、パスフローについては一意的ではないことを意味している。しかし制約条件の線形性より制約領域は凸集合となり、目的関数もまた凸関数である。したがって局所的最小点は全域的最小点に一致するから、非線形計画法の多くの解法が適用できる。

等時間原則配分をより現実近づけるためには容量制限を加えなければならない。容量制限を行う場合の問題点は均衡状態の定義および均衡解の存在の可否である。とくに均衡解の存在性の問題は実際計算では重要になってくる。なぜならいかなる計算法においても、均衡解が存在し得ないなら、計算の続行はいつか不可能となってしまうからである。均衡解の存在の可否については第5章で詳しく取り扱っている。容量制限を陽の形で表わさなくとも、走行時間関数の適当な選択によって容量制限が可能となるので、本研究では制約条件に容量制限式を加えることを行っていない。

第3章では走行時間関数を線形に仮定した場合の等時間原則配分の計算法を説明している。こ

の計算法では順番にODペアを遷移しながら、毎回の最短路探索によって得られた何本かの起終点間の経路に対して等時間原則が満足されるようにOD交通量を配分するという方法をとっている。OD交通量を配分するアルゴリズムは、等時間原則が満足されるようにOD交通量をゼロから所与の値にまで段階的に増加させていくものである。このアルゴリズムではOD交通量の増加によるフローパターンの変化を連立一次方程式によって追跡していくことになるが、求解のための逆行列が、1つ前のフローパターンでの逆行列から計算できるという利点がある。このアルゴリズムによる計算が途中で続行不可能となることはなく、必ず均衡解に到達することを証明している。

このアルゴリズムの背景となっているのは経路の一次独立性の概念である。経路が一次独立であるというのは、それらの経路ベクトルが一次独立となることである。経路が一次従属であるとき、経路ベクトルは一次独立な経路の経路ベクトルの一次結合により表わされる。一次独立な経路に対して等時間原則が満足されるようにOD交通量を配分したとき、他の一次従属な経路についても等時間原則が満足されていることが導かれている。したがって探索された幾つかの経路のうち交通量が配分されるのは高々一次独立な経路のみである。ノード数10、リンク数17の簡単な道路網に対してこの計算法の適用を行ったところ、5回の繰り返しによって十分の収束が得られ、計算時間も短く、ある程度の規模をもつネットワークに対しても十分計算可能であることがわかった。

第4章では走行時間関数を非線形に仮定した場合の等時間原則交通量配分の計算法を説明している。走行時間関数を非線形に仮定する場合の利点は、漸近線をもつ走行時間関数を用いることによって容量制限が可能となることである。反面計算が面倒となることは避けられない。

走行時間関数を逐次線形近似することによって、走行時間関数を非線形に仮定した場合の計算法を適用することができる。この計算法の収束性は線形走行時間関数の場合に比べてやや劣る。走行時間関数を逐次線形近似すると2次計画問題となるので、2次計画法におけるWolfeの解法を適用することができる。この場合の欠点は計算に用いる変数の数が実変数の数倍となるため計算時間が多くかかることである。計算例ではこのことが確認されている。

非線形計画法で最近注目されているものにSUMT変換法がある。これは制約条件に罰金関数を付与することによって目的関数に組み込み、制約条件のない最適化問題に変換して解を求める方法である。SUMT変換を等時間原則配分に適用した場合、計算の収束性に問題があることが判明した。その理由はSUMT変換法では目的関数が真に凸になることが必要であるが、等時間原則配分ではパスフロー、リンクフローいずれを変数にしても真に凸とはならないからである。

収束性の問題はもちろん振動パラメーターの選択にもおおいに関係しているものと思われる。

第5章では交通量配分と道路網計画に関連するいくつかの問題を取り扱った。これまで総走行時間最小化原則と等時間原則とは全く別のものとして計算法の開発が行われてきた。しかし両者は密接な関連性を有しており、走行時間関数の適当な変換によって総走行時間最小化原則配分の等時間原則配分への、または等時間原則配分の総走行時間最小化原則配分への変換が可能であることがわかった。この互換性は両配分の目的関数がリンクに関して分離形になっていることによるものである。ある特殊な走行時間関数の場合を除いて、一般には両者の配分交通量は一致しない。これは各個人が自己の損失を最小にしようとする行動をとることによって、全体の損失が最小にはならないことを意味するものである。

等時間原則配分ではパスフローは一意的には定まらないが、実際の計画ではこれを必要とすることがある。これまで等時間原則配分でパスフローを定める方法は配分比条件式を用いる方法が提案されているにすぎない。等時間原則を満足する道路区間交通量がすでに求められているとしたときに、等時間となる各経路を通る先験確率を与えた場合に、同時確率が最大となるすなわち実際に最も起りやすいパスフローのパターンを求める方法を提案した。実際に先験確率を与えることは困難であるが、これを各経路について等しいとしたときには解は配分比条件式を用いた場合と一致する。

等時間原則交通量配分の計算法として飯田のカット法がある。カット法の特徴は道路区間交通量を変数にしていることであり、交通量の需給関係はカット条件式により表わされる。飯田はこのカット条件式と等時間条件式とがちょうど変数の数だけ存在すると報告しているが、その理論的根拠はあいまいであった。このカット法の適用が不可能な場合があることは1つの反例によって示している。この反例はカット条件式の成立しない場合であり、あと1つの条件式は一般カットによって表現される。

一般カットとは各リンクにある整数値を付与したものであり、通常のカットセットはその特殊な場合である。この一般カットを用いると、先に述べた等時間原則による交通量配分における解の存在のための必要十分条件が示される。しかしこの条件自体は実用的なものであるとは言えない。

道路網を構成する各リンクに容量制限を行い、OD交通量構成比を一定にして総交通量を増加させていくとき、最終的にどれだけの総交通量を流すことができるかという道路網の最大フローを求める問題がある。この道路網の最大フローは一般カットによって表現される。西村によって示されているカットによる最大フローは、この一般カットによる表現のある特殊な場合であるか

ら、それは必ずしも真の最大フローとはならない。

第6章では分割配分法について、等時間原則配分との関連性ならびに計算の効率化のための手法を述べている。実際計算でよく用いられる分割配分法は等時間原則配分の近似計算法であると考えられる。もし総交通量の増加によるパスフローの減少が起らないなら、分割数を非常に大きくとっていくと分割配分法による解は等時間原則による解に近づく。

分割配分法では所与のOD表を n 等分することになるが、それは計算技術上からは得策ではない。最終的な結果への収束性を早めるためには、走行時間関数の凸性から増加交通量を次第に小さくしていくべきである。この意味で所要時間の修正量が平均的に等しくなるようなOD表の分割の仕方を提案した。

交通量配分における計算の大部分は最短経路探索であり、その計算量が全体の計算量を直接左右する。したがって実際の配分計算では最短経路探索の計算の効率化が必要となる。このため、すべてのノード間の最短経路探索を行う場合に、ネットワークを分割して計算を行う方法を提案した。最短経路探索の計算量はノード数の3乗に比例するといわれているから、ネットワークの規模を小さくすることによって全体の計算量を減少させることができるわけである。

以上が本研究の要約であるが、次に今後に残された課題をいくつか述べる。

本文では走行時間関数が線形の場合と非線形の場合とに分けて計算法を説明したが、非線形の場合が一般的である。これまでに述べた計算法では、実際の計画で対象となるような大規模なネットワークに対してはまだ十分実用的であるとは言えない。その理由は計算時間がかかり過ぎることの他、計算機の容量の制約を受けることである。本計算法では探索された経路をすべて記憶しておくことが必要であるが、これに要する記憶容量が膨大となる。しかしこれはある程度プログラミングの技術で改善することが可能である。

漸近線をもつ非線形の走行時間関数を用いる場合には、あらかじめ解の存在を確認しておかなければならない。道路網の容量が需要交通量に比べて十分に余裕がある場合には確認は容易であるが、両者が近接している場合には確認は困難になってくる。これはマルチコモディティーフローの容量問題と密接な関連を有するものであるが、実用的な意味での解存在のための必要十分条件は得られていないのが現状である。

本文では交通量配分をパスフローを決める場合の他は決定論的な立場で論じている。しかし交通流自体および人間の行動の選択には多分に不確定な要素が含まれているから、確率論的な取り扱いを導入することも必要である。交通量配分理論は、運転者個人の経路選択挙動をうまく説明するものであるとともに、それらの集合として道路交通量を適確に推定できるものでなければな

らない。したがって部分として見たときには確率論的な内容を持ち、全体として見たときには決定論的な面も持っていることが理想である。

等時間原則交通量配分でよく問題とされることは、どの程度実際の交通量に適合しているかということである。交通量配分計算と実際の交通量との適合性を検討した論文はあまり見あたらないが、たとえば Burrel によれば実際の交通量の 98 % が彼の理論によって説明されるとしている。しかしこのような比較は一般的には困難である。なぜなら実際交通量と計算交通量との相違が、配分計算によるものなのかあるいは用いた OD 表の誤差によるものなのか明らかではないし、またゾーン内交通の処理の如何によっても結果はずい分異ってくることが考えられるからである。もちろん実際の交通量によく適合することは必要であるが、単に適合性からだけでは配分理論の優劣を比較することは難かしく、むしろ運転者の経路選択挙動をうまく説明できるものであることがより重要である。

参 考 文 献

- 1) J.G.Wardrop, "Some Theoretical Aspect of Road Research",
Proceedings, Institute of Civil Engineers, Part 2, 1952,
pp.325-378
- 2) J.Almond, "Traffic Assignment to a Road Network", Traffic
Engineering and Control, Vol.6, No.10, February, 1965.
- 3) E.P.Ratcliffe, "A Comparison of Drivers' Route Choice Cri-
teria and Those Used in Current Assignment Processes",
Traffic Engineering and Control, Vol.13, No.11/12, March/
April, 1972.
- 4) Detroit Metropolitan Area Study, Part 2, Future Traffic and
a Long Range Expressway Plan, 1956.
- 5) K.Moskowitz, "California Method of Assigning Diverted
Traffic to Proposed Freeways", H.R.B, Bulletin 130, 1956.
- 6) G.B.Dantzig, "Discrete-Variable Extremum Problems", J.Opns.
Res.Soc. of America, Vol.5, 1957, pp.266-277.
- 7) E.F.Moore, "The Shortest Path Through a Maze", Proc. Inter-
nat. Symp. on Theory of Switching, April, 1957.
- 8) J.D.Carrol, "A Method od Traffic Assignment to an Urban
Network", H.R.B., Bulletin 224, 1959.
- 9) Chicago Area Transportation Study Final Report", Vol.1, 1959,
Vol.2, 1960.
- 10) Pittsburg Area Transportation Study, Vol.1, 1961, Vol.2,
1962.
- 11) Final Report of the Highway Transportation Demand Research
Project, Research Report R 65-24, M.I.T., 1965.
- 12) Traffic Assignment Manual, Bureau of Public Roads, Office
of Planning, Urban Planning Division, June, 1964.

- 13) N.A.Irwin, N.Dodd, and H.G.Voncube, "Capacity Restraint in Assignment Programs", H.R.B. Bulletin 297, 1961, pp.109-127.
- 14) R.Smock, "An Iterative Assignment Approach to Capacity Restraint on Arterial Networks", H.R.B. Bulletin 347, 1962, pp. 60-66.
- 15) 加藤晃, "道路網における交通流配分の解析", 土木学会論文集, 第129号, 1966, 5月, pp.23-32.
- 16) 星野哲三, "道路網における交通量配分の理論", 道路, 1960, 9月, pp.701-712.
- 17) J.E.Burrell, "Multiple Route Assignment and its Application to Capacity Restraint, Proc., Fourth International Symposium on the Theory of Traffic Flow, 1968.
- 18) 佐々木綱, "吸収マルコフ過程による交通量配分理論", 土木学会論文集, 第121号, 1965, 9月, pp.28-32.
- 19) N.A.Irwin and A.G.Von Cube, "Capacity Restraint in Multi-Travel Mode Assignment Programs, H.R.B. Bulletin 347, 1962, pp.258-289.
- 20) J.O.Tresidder, D.A.Meyers, J.E.Burrell and T.J.Powell, "The London Transportation Study", Method and Techniques, Proc. Inst. Civil. Eng., 39, 1968, pp.433-464.
- 21) J.A.Tomlin, "A Mathematical Programming Model for the Combined Distribution-Assignment of Traffic, Transportation Sci., 5, 1971, pp.122-140.
- 22) 松井寛, "確率最大化による交通量配分理論", 交通工学, Vol.6, No.5, 1971, 9月, pp.3-11.
- 23) Claude,Berge, "The Theory of Graphs and its Applications", John Wiley & Sons, 1964.
- 24) R.G.Busacker and T.L.Saaty, "Finite Graphs and Networks-An Introduction with Applications", McGraw Hill Book, 1965.
- 25) J.Kowalik and M.R.Osborne, "Method for Unconstrained Opti-

- mization Problems", American Elsevier Publishing Company, 1968.
- 26) 三根久, "オペレーションズ・リサーチ", 上巻, 朝倉書店, 1966.
 - 27) 坂口実, "教理計画法" 培風館, 1968.
 - 28) W.W.Mosher, "A Capacity-Restrained Algorithm for Assigning Flow to Transport Network, HRB, Highway Research Record, No.6, 1963, pp.41-68.
 - 29) 佐々木綱, "道路網における交通量の配分方法", 日本地域学会年報, 第2号, 1963, pp.19-34.
 - 30) 飯田恭敬, "バスターを用いた等時間原則による交通量配分", 土木学会論文報告集, 第168号, 1969, 8月, pp.45-57.
 - 31) 飯田恭敬, "カット法による等時間原則配分-三角形道路網への適用-, 交通工学, Vol.6, No.6, 1970, pp.26-38.
 - 32) 飯田恭敬, 井上博司, 魚住隆彰, "カット法による交通量配分", 土木学会論文報告集, 第196号, 1971, 12月, pp.95-103.
 - 33) Tsuna Sasaki and Hiroshi Inoue, "Traffic Assignment by Analogy to Electric Circuit", Proceedings of the Sixth International Symposium on Transportation and Traffic Theory, 1974, pp.495-518.
 - 34) 佐々木綱, 三好逸二, "電気回路とのアナロジーを用いた交通量配分", 関西OR研究報文集, 第1巻別刷, 1969, pp.66-79.
 - 35) N.O.Jørgensen, "Some Aspects of the Urban Traffic Assignment Problem, I.T.T.E. Graduate Report, University of California, Berkeley, 1963.
 - 36) 井上博司, "輸送計画的配分および等時間原則による配分に関する研究, 土木学会第25回年次学術講演会講演概要集, 第4部, 1970, pp.113-114.
 - 37) S.C.Dafermos, "An Extended Traffic Assignment Model with Applications to Two-Way Traffic", Transportation Science, Vol.5, No.4, November, 1971, pp.366-389.
 - 38) S.C.Dafermos, "The Traffic Assignment Problem for Multiclass-User Transportation Networks, Transportation

Science, Vol.6, No.1, February, 1972, pp.73-87.

- 39) T.Leventhal, G.Nemhauser and L.Trotter Jr., "A Column Generation Algorithm for Optimal Traffic Assignment, Transportation Science, Vol.7, No.2, May, 1973, pp.168-176.
- 40) 井上博司, "交通量配分の数学的手法に関する研究", 京都大学工学研究科修士論文, 1971.
- 41) E.R.Ruiter, "Implementation of Operational Network Equilibrium Procedures", Transportation Research Record, 491, 1974, pp.40-51.
- 42) S.Nguyen, "An Algorithm for the Traffic Assignment Problem", Transportation Science, Vol.8, No.3, August, 1974, pp.203-216.
- 43) L.J.Lebland, E.K.Morlok and W.P.Dierskalla, "An Accurate and Efficient Approach to Equilibrium Traffic Assignment on Congested Networks", Transportation Research Record, 491, 1974, pp.12-23.
- 44) C.Pinnel and G.T.Satterly, "Analytical Methods in Transportation-Systems Analysis for Arterial Street Operation", J. Engineering Mechanics Div., A.S.C.E., December, 1963, pp.67-95.
- 45) M.J.Beckman, C.B.McGuire and C.B.Winsten, "Studies in the Economics of Transportation", Yale University Press, 1956, pp.59-70.
- 46) 佐々木綱, "道路網における輸送計画について, 第4回日本道路会議論文集, 1957, pp.43-46.
- 47) R.R.Snell and T.C.Yang, "Traffic Assignment by Maximum Principle, Journal of the Highway Division, Proceedings of A.S.C.E., 1966, pp.1-14.
- 48) A.Charnes and W.W.Cooper, "External Principles for Simula-

ting Traffic Flow over a Network of City Streets", Proceedings of the National Academy of Science, Vol.41, No.2, February, 1958.

- 49) 浜田, 東大生研電気談話会報告, 20, 8, 1970, 3月.
- 50) 最首和雄, 森脇義雄, "最適な交通流配分について", 論文47-C17, 電気学会論文誌, 1972, 3月, pp.148-156.
- 51) 米谷栄二, 飯田恭敬, 辻本有一, "2次計画法による交通量配分", 土木学会論文報告集. 第167号, 1969, 7月, pp.23-31.
- 52) 古屋茂, "行列と行列式", 培風館, 1969.
- 53) 米谷栄二, 渡辺新三, 毛利正光, "交通工学", 1965.
- 54) 永井隆夫, "非線形走行時間関数を用いた等時間原則交通量配分に関する二, 三の考察", 京都大学卒業論文, 1973.
- 55) 長沢小太郎, "非線形計画法による等時間原則交通量配分計算に関する二, 三の考察", 京都大学卒業論文, 1972.
- 56) 佐々木綱, 井上博司, "等時間原則交通量配分におけるパスフローの推定", 昭和47年度関西支部年次学術講演会講演概要, IV-10.
- 57) T.C.Hu, "Multi-Commodity Network Flows", Opns. Res. 11, 3, May-June, 1963, pp.344-360.
- 58) 翁長建治, "多重フロー定理", 電子通信学会論文誌, 70/7, Vol.53-A, No.7, pp.350-356.
- 59) 三好逸二, 山村信吾, "道路網における最大総トリップ数について", 第23回土木学会年次学術講演会講演概要, pp.429-430.
- 60) 西村昂, 中村正治, "道路網の最大フローに関する一考察", 昭和43年度土木学会関西支部年次学術講演会講演概要集, IV-8.
- 61) 西村昂, "道路網の最大フローの存在範囲について", 第23回土木学会年次学術講演会講演概要集, IV-8.
- 62) 西村昂, "カットによる最大フロー問題への1つのアプローチ", 昭和50年度関西支部年次学術講演会講演概要, IV-22.
- 63) Masao Iri, "On an Extension of the Maximum-Flow Minimum-Cut Theorem to Multicommodity Flows", J. Opns. Res. Soc. Japan, Vol. 13, No. 3, January, 1971, pp.129-135.
- 64) 飯田恭敬, "道路網の最大容量の評価法", 土木学会論文報告集, 第205号, 1972,

9 月, pp.121-129.

65) 井上博司, "分割配分法に関する2, 3の考察", 第11回日本道路会議一般論文集,
1973, 10 月, pp.15-16.

66) L.R.Ford, "Network Flow Theory", The RAND Corp., P-923,
August, 1956.

67) E.W.Dijkstra, "A Note on Two Problems in Connection with
Graphs", Numerische Mathematik, 1, 1959, pp.269-271.

68) S.E.Drefus, "An Appraisal of Some Shortest Path Algorithms",
Opns. Res., 17, 1969, pp.395-412.

69) 井上博司, "ネットワーク分割による最短路探索", 昭和50年度関西支部年次学術講演会講演概要, IV-23.

